CLASSE : Terminale **EXERCICE II** : au choix du candidat (10 points)
VOIE : ☒Générale
ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ: Sciences de l'ingénieur- Partie Sciences physiques
DURÉE DE L'EXERCICE : 30 min **CALCULATRICE AUTORISÉE :** ☒ Oui « type collège »

EXERCICE II - COMBIEN DE TEMPS UN PARAPENTISTE PEUT-IL RESTER EN VOL AVANT D'ETRE EN DANGER D'HYPOTHERMIE ? (10 points)

1.

Le transfert thermique s'effectue du corps chaud vers le corps froid.

La température de l'air est θ_{air} = 10,8 °C et la température du parapentiste est supérieure.

Le transfert thermique s'effectue du parapentiste vers l'air.

D'après le premier principe de la thermodynamique :

$\Delta U = Q + W$

$W = 0$ car le système ne travail pas

$Q = Q_1 + Q_2$. Avec Q_1 l'énergie produite par son métabolisme et Q_2 l'énergie échangé avec l'extérieur.

$\Delta U = Q_1 + Q_2$

$\boxed{\Delta U = P_{th} \times \Delta t + \Phi_{cc} \times \Delta t}$

2.

$\Delta U = P_{th} \times \Delta t + \Phi_{cc} \times \Delta t$

et $\Delta U = m \times c \times \left(\theta(t + \Delta t) - \theta(t)\right)$

$$m \times c \times \left(\theta(t + \Delta t) - \theta(t)\right) = P_{th} \times \Delta t + \Phi_{cc} \times \Delta t$$

$$m \times c \times \left(\theta(t + \Delta t) - \theta(t)\right) = (P_{th} + \Phi_{cc}) \times \Delta t$$

$$m \times c \times \frac{\left(\theta(t + \Delta t) - \theta(t)\right)}{\Delta t} = P_{th} + \Phi_{cc}$$

$$m \times c \times \frac{\left(\theta(t + \Delta t) - \theta(t)\right)}{\Delta t} = P_{th} + h \times S \times (\theta_{air} - \theta(t))$$

Quand $\Delta t \to 0$, $\frac{(\theta(t+\Delta t)-\theta(t))}{\Delta t} \to \frac{d\theta}{dt}$

$$m \times c \times \frac{d\theta}{dt} = P_{th} + h \times S \times (\theta_{air} - \theta(t))$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{P_{th}}{m \times c} + \frac{h \times S}{m \times c} \times (\theta_{air} - \theta(t))$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{P_{th}}{m \times c} + \frac{h \times S}{m \times c} \times \theta_{air} - \frac{h \times S}{m \times c} \times \theta(t)$$

$$\frac{d\theta}{dt} + \frac{h \times S}{m \times c} \times \theta(t) = \frac{P_{th}}{m \times c} + \frac{h \times S}{m \times c} \times \theta_{air}$$

$$\frac{d\theta}{dt} + \frac{h \times S}{m \times c} \times \theta(t) = \frac{h \times S}{m \times c} \times \theta_{air} + \frac{P_{th}}{m \times c}$$

On obtient une équation différentielle de la forme :
$$\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{\tau}\theta = \frac{1}{\tau}\theta_{air} + \frac{P_{th}}{m \times c}$$

Avec, par identification :
$$\frac{1}{\tau} = \frac{h \times S}{m \times c}$$

$$\tau = \frac{m \times c}{h \times S}$$
$$\tau = \frac{75{,}3 \times 3{,}5.10^3}{100 \times 1{,}9}$$
$$\boxed{\tau = 1{,}4.10^3 s}$$

3.
Mathématiquement, une équation différentielle de la forme $y' = a \times y + b$
à pour solution $y(x) = K \times e^{a \times x} - \frac{b}{a}$
$$\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{\tau}\theta = \frac{1}{\tau}\theta_{air} + \frac{P_{th}}{m \times c}$$
$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{\tau}\theta + \frac{1}{\tau}\theta_{air} + \frac{P_{th}}{m \times c}$$

Par identification :

- $a = -\frac{1}{\tau}$
- $b = \frac{1}{\tau}\theta_{air} + \frac{P_{th}}{m \times c}$

$$-\frac{b}{a} = -\frac{\frac{1}{\tau}\theta_{air} + \frac{P_{th}}{m \times c}}{-\frac{1}{\tau}}$$
$$-\frac{b}{a} = \tau \times \left(\frac{1}{\tau}\theta_{air} + \frac{P_{th}}{m \times c}\right)$$
$$-\frac{b}{a} = \theta_{air} + \tau \times \frac{P_{th}}{m \times c}$$
$$-\frac{b}{a} = \theta_{air} + \frac{m \times c}{h \times S} \times \frac{P_{th}}{m \times c}$$
$$-\frac{b}{a} = \theta_{air} + \frac{P_{th}}{h \times S}$$
$$-\frac{b}{a} = 10{,}8 + \frac{116}{100 \times 1{,}9}$$
$$-\frac{b}{a} = 11{,}4$$

$$\theta(t) = K \times e^{-\frac{1}{\tau} \times t} + 11{,}4$$
$$\theta(t) = K \times e^{-\frac{t}{1{,}4.10^3}} + 11{,}4$$
Pour trouver K, prenons les conditions initiales : $\theta(t = 0) = 37°C$
$$\theta(t = 0) = K \times e^{-\frac{0}{1{,}4.10^3}} + 11{,}4$$
$$37 = K \times 1 + 11{,}4$$
$$K = 37 - 11{,}4$$
$$K = 25{,}6$$
D'ou : $\theta(t) = 25{,}6 \times e^{-\frac{t}{1{,}4.10^3}} + 11{,}4$

4.

$$\theta(t) = 25{,}6 \times e^{-\frac{t}{1{,}4.10^3}} + 11{,}4$$
$$25{,}6 \times e^{-\frac{t}{1{,}4.10^3}} + 11{,}4 = \theta(t)$$
$$25{,}6 \times e^{-\frac{t}{1{,}4.10^3}} = \theta(t) - 11{,}4$$
$$e^{-\frac{t}{1{,}4.10^3}} = \frac{\theta(t) - 11{,}4}{25{,}6}$$
$$\ln\left(e^{-\frac{t}{1{,}4.10^3}}\right) = \ln\left(\frac{\theta(t) - 11{,}4}{25{,}6}\right)$$
$$-\frac{t}{1{,}4.\,10^3} = \ln\left(\frac{\theta(t) - 11{,}4}{25{,}6}\right)$$
$$t = -1{,}4.\,10^3 \times \ln\left(\frac{\theta(t) - 11{,}4}{25{,}6}\right)$$

Hypothermie grave : 30 °C

$$t = -1{,}4.\,10^3 \times \ln\left(\frac{30 - 11{,}4}{25{,}6}\right)$$
$$t = 447 \text{ s}$$
$$t = 7 \text{ min } 27 \text{ s}$$

C'est une durée très courte pour être réaliste.

On a considéré:

- l'échange entre l'air et l'être humain. Le parapentiste est habillé, sa tenue possède une résistance thermique. La durée pour atteindre l'hypothermie grave est donc plus grande.
- Le parapentiste est naturellement réchauffé par de l'énergie produite par son métabolisme et représentée par un flux constant : P_{th} = 116 W. La puissance produite s'adapte en fonction des besoins. La durée pour atteindre l'hypothermie grave est donc plus grande.