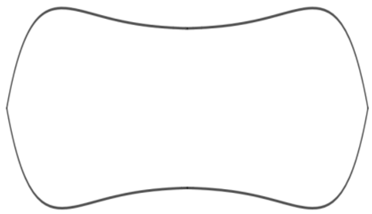
Exercice 1 : _Alimentation des canons à neige_
(exercice de physique-chimie et mathématiques commun à tous les candidats)

L'enneigement artificiel des stations de ski est une pratique relativement récente en Europe et en Amérique du Nord. C'est un procédé nécessaire au maintien et au développement des activités économiques d'une station. Or, la production de neige nécessite de grands volumes d'eau pompés dans les rivières, les nappes phréatiques, les barrages hydroélectriques et les retenues collinaires.

Aujourd'hui, la plupart des stations construisent des retenues d'eau en altitude afin d'alimenter les canons à neige placés le long des pistes en aval. La surface qu'il est possible de recouvrir en neige artificielle dépend du volume d'eau stockée dans la retenue.

Il faut environ un volume de 4 000 m^3 d'eau pour couvrir de neige et rendre skiable une surface d'un hectare.

Pour répondre à ses besoins, une station a décidé de réaliser un bassin dont la vue de dessus a la forme ci-contre et d'une profondeur telle que le volume d'eau contenu présente une hauteur h maximale de 8 m.



L'objectif est de déterminer si la quantité d'eau liquide retenue dans le bassin lorsque celui-ci est rempli permet de couvrir de neige une surface de 14 hectares.

Au niveau du sol, le tour du bassin peut être modélisé par la courbe fermée représentée sur la figure 1 ci-dessous.
Avec l'échelle utilisée sur le graphique, 1 unité correspond à 15 m :

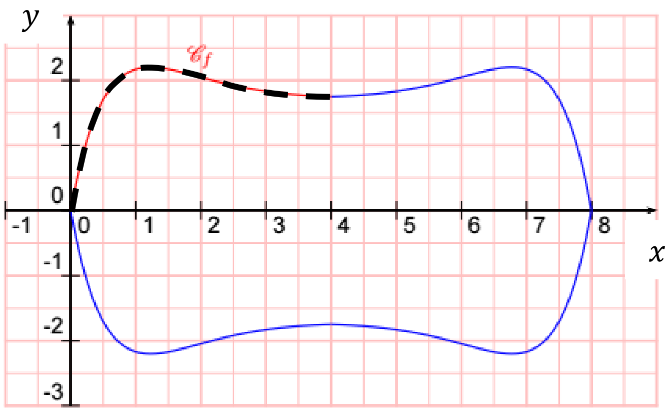


***Figure 1** : tour du bassin au niveau du sol*

1.1. Calcul de la surface du bassin au niveau du sol
Le tour du bassin au niveau du sol présente deux axes de symétrie : l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 4$. Il est obtenu par symétrie de la la courbe $\mathscr{C}_f$ tracée en pointillé sur la figure 1.
La courbe $\mathscr{C}_f$ est représentative de la fonction f définie pour tout réel sur l'intervalle [0 ; 4] par :

$$f(x) = -(x^2 - 3{,}8x + 1{,}8)e^{-x} + 1{,}8$$

Sur l'intervalle [0 ; 4], on admet que la fonction f est positive.

1.1.1. Montrer que la fonction f admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction F définie pour tout réel x par :

$$F(x) = (x^2 - 1{,}8x)e^{-x} + 1{,}8x$$

1.1.2. En exploitant la symétrie du bassin, montrer que la surface S du bassin au niveau du sol exprimée en m² a pour valeur : $6480 + 7920e^{-4}$

Donner sa valeur arrondie au m² près.

1.2. Calcul du volume d'eau pouvant être retenue dans le bassin

On admet que le volume d'eau dans le bassin dépend de la surface S du bassin au niveau du sol précédemment calculée et de la hauteur d'eau h qui y est contenue.
Plus précisément, pour une hauteur d'eau h, le volume V, mesuré en m^3 est donné par la relation suivante :

$$V(h) = \left(\frac{(24+h)^3}{3072} - \frac{9}{2}\right)S$$

1.2.1 Indiquer si l'eau contenue dans le bassin complétement rempli permet de recouvrir une surface d'un domaine skiable de 14 hectares en neige artificielle.

Pour surveiller la quantité d'eau disponible, on mesure la hauteur d'eau h à l'aide d'un capteur de niveau à ultrason maintenu au-dessus de l'eau à l'aide d'un support (voir figure 2 ci-dessous).

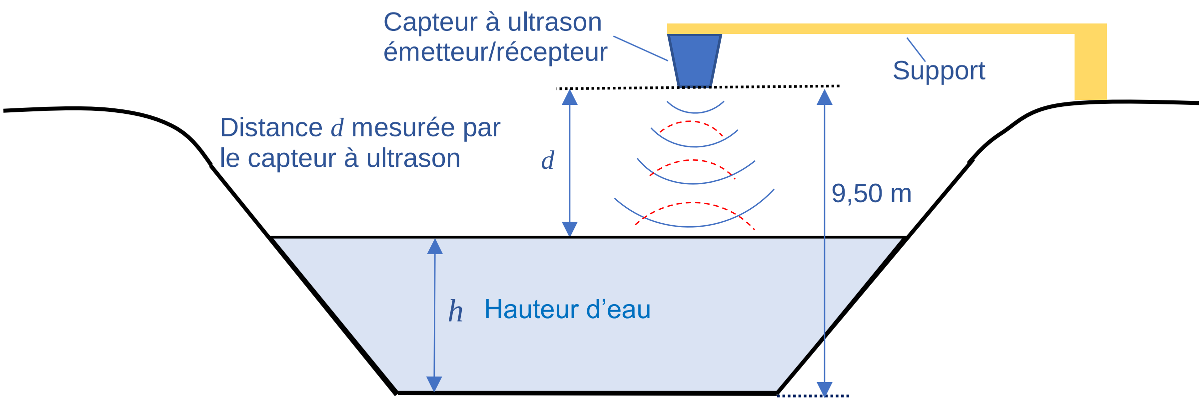


Figure 2 *Schéma du bassin*

Le document 1 présente les caractéristiques techniques du capteur proposé. Le document 2 présente l'évolution de la vitesse du son dans l'air en fonction de la température de celui-ci.

1.2.2. Justifier, en exploitant la figure 2 et le document 1, que le modèle du capteur présenté est adapté aux dimensions du bassin et aux conditions environnementales d'utilisation.

1.2.3. Le capteur présenté est équipé d'une compensation en température.

Lors d'un test de fonctionnement, le technicien relève les signaux ultrasonores représentés sur la figure 3 ci-contre.

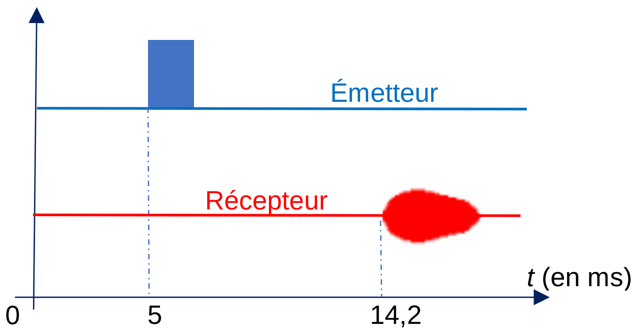


Figure 3 *: Chronogrammes des signaux du capteur à ultrason*

Déterminer la valeur de la hauteur d'eau *h* en exploitant le schéma du bassin (figure 2), le document 2 et le relevé des signaux (figure 3), sachant que la température extérieure est égale à 7 °C lors de la mesure.

Document 1 : Documentation du capteur de niveau à ultrason

CARACTERISTIQUES

Présentation :	Coque métallique
Matière :	Fonte d'aluminium, peinture époxy
Dimensions (mm) :	L=95 x l=67 x H=242 (voir détail)
Poids (kg) :	1.7 + câble
Tension d'alimentation :	10 à 40 V=
Signal de sortie :	4/20 mA sur 2 fils
Etendue de mesure :	30 cm à 10 mètres
Temps de chauffe :	3 s
Compensation en température :	oui

ENVIRONNEMENT, NORMES

Altitude maximum :	2000m au-dessus du niveau de la mer
Indice de protection :	IP68
Température de fonctionnement :	-20°C à 60°
Température de stockage :	-20°C à 60°C
Compatibilité électromagnétique :	Transitoires rapides niveau 4 Chocs de foudre onde 8/20, 2 KV EN 61000-6-2, EN 61000-6-3
Sécurité électrique :	EN 60950-1
Santé :	EN 62479
Marquage CE :	CE

Source : www.paratronic.info/eau-environnement

Document 2 : Evolution de la vitesse du son

*On considère que la vitesse de propagation (ou célérité) d'un son ou ultrason dans l'air dépend uniquement de la température. Elle est proportionnelle à la racine carrée de la température absolue **T**.*

Elle est donnée par la relation:

$$c_{air} = 20{,}05.\sqrt{T} \qquad \text{avec} \quad T\,(\mathrm{K}) = \theta\,(°\mathrm{C}) + 273$$

T désignant la température en Kelvin (K), et *θ* la température en degrés Celsius (°C)