EXERCICE 3 (4 points)

(mathématiques)

Vous traiterez 4 questions au choix parmi les 6 questions proposées.

Les questions sont indépendantes.

Pour chacune des **quatre questions** choisies, vous indiquerez clairement son numéro sur votre copie en début d'exercice.

Seules ces questions sont évaluées. Chacune d'elles est notée sur un point. Traiter une question supplémentaire ne rapporte aucun point.

Question 1.

g est une fonction définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$.

On admet que la dérivée de g est la fonction g' définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$g'(t) = 6e^{-t}(1-t).$$

1. Étudier le signe de $g'(t)$ sur $[0\,;+\infty[$.
2. En déduire les variations de g sur $[0\,;+\infty[$.

Question 2.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

Soit A et B les points d'affixes respectives :

$$z_A = e^{i\frac{5\pi}{6}} \text{ et } z_B = e^{-i\frac{2\pi}{3}}.$$

1. Les points A et B sont correctement représentés sur l'une des figures ci-dessous. Laquelle ? Aucune justification n'est attendue.

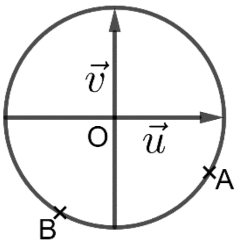

Figure 1

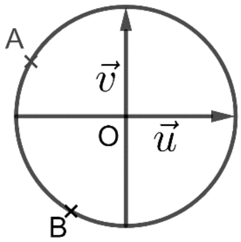

Figure 2

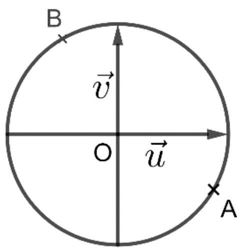

Figure 3

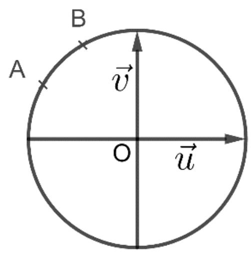

Figure 4

2. Montrer qu'un argument de $\frac{z_A}{z_B}$ est $\frac{-\pi}{2}$.

Question 3.

Résoudre dans $]1\,;+\infty[$ l'équation :

$$\ln(x-1) + \ln(x+1) + \ln(x) = \ln(x^2-1) - \ln(0{,}5).$$

Question 4.

On considère l'équation différentielle **(E)** : $y' = -y + 2$.

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle **(E)**.
2. En déduire la solution f de l'équation différentielle **(E)** qui s'annule en 0.

Question 5.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2e^x$.

1. Montrer que pour tout réel x de $\mathbb{R}$, $f(x) = e^x(x^2e^{-x} - 2)$.
2. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Question 6.

Rappel : Pour a et b , deux réels, nous avons les formules suivantes :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

On considère un signal électrique dont l'expression en fonction du temps t est donnée par :

$$u(t) = \sqrt{3}\cos(t) - \sin(t).$$

1. Montrer que le signal u peut s'écrire pour tout t réel sous la forme :
$$u(t) = 2\cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right).$$
2. Résoudre dans $[0\ ;\ \pi[$, l'équation $u(t) = 1$.

On pourra s'aider du demi-cercle trigonométrique ci-dessous :