EXERCICE 3 commun à tous les candidats (4 points)

(mathématiques)

Le candidat doit traiter quatre questions parmi les six numérotées de 1 à 6 que comporte l'exercice. Les questions sont indépendantes les unes des autres. Le candidat choisit les quatre questions auxquelles il répond et indique clairement leur numéro sur sa copie en début d'exercice. Seules ces questions sont évaluées. Chacune d'elles est notée sur un point. Traiter une question supplémentaire ne rapporte aucun point.

Question 1

1. Montrer, en détaillant vos calculs, que :

$$\ln(2025) = 4\ln(3) + 2\ln(5).$$

2. Simplifier le nombre A ci-dessous en détaillant les calculs :

$$A = 2\ln(\mathrm{e}^4) - 3\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right).$$

Question 2

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On considère le nombre complexe suivant :

$$z = \frac{-1+\mathrm{i}}{3\mathrm{i}}.$$

1. Mettre z sous forme algébrique. Détailler les calculs.

2. Mettre z sous forme exponentielle. Détailler les calculs.

Question 3

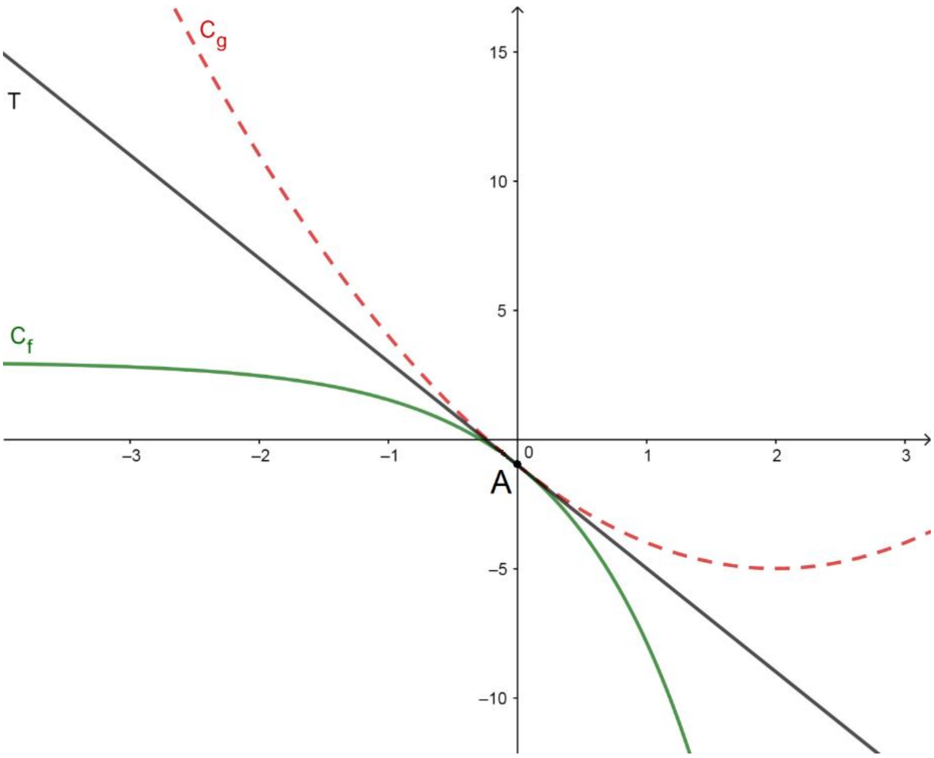
On considère l'équation différentielle $(E) : 2y' + y = 0$, où y est une fonction de la variable x, définie et dérivable sur $\mathbf{R}$ et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle (E).

2. Le plan est muni d'un repère.
Déterminer la solution f de (E), dont la courbe représentative C_f dans ce repère passe par le point $A(\ln(9) ; 1)$.

Question 4

On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = a + be^{x}$, où a et b sont deux nombres réels.
On considère la fonction g définie sur **R** par $g(x) = x^2 - 4x - 1$.
On note C_f et C_g les courbes représentatives des fonctions f et g, tracées dans le repère orthogonal ci-dessous.



1. On admet que les deux courbes C_f et C_g ont un unique point en commun, noté A d'abscisse 0.
Calculer $g(0)$, puis en déduire que $a + b = -1$.

2. On admet que les deux courbes C_f et C_g ont la même tangente T au point A.

a. Donner, pour tout réel x, une expression de $g'(x)$ puis calculer $g'(0)$.
b. En déduire la valeur de b, puis celle de a.

Question 5

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln(x).$$

1. On admet que g est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,

$$g'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x}.$$

2. Montrer que la fonction g admet un minimum, dont on précisera la valeur exacte, sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Question 6

Rappel : pour a et b deux réels, on a les formules suivantes :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

La tension u, exprimée en volt, aux bornes d'un dipôle en fonction du temps t, exprimé en seconde, est donnée par : $u(t) = \cos(50t) + \sqrt{3}\sin(50t)$.

1. Pour tout nombre réel t, écrire $u(t)$ sous la forme $u(t) = U_{\max}\cos(\omega t + \varphi)$ où :

- $U_{\max}$ représente la tension maximale (exprimée en volt) ;
- ω représente la pulsation (exprimée en rad.s^{-1}) ;
- φ représente le déphasage (exprimé en rad).

2. En déduire la fréquence correspondante $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$, exprimée en Hz. Arrondir le résultat à l'unité.