

EXERCICE 3 commun à tous les candidats (4 points)

(mathématiques)

Le candidat doit traiter quatre questions parmi les six que comporte l'exercice. Les questions sont indépendantes. Chacune d'elles est notée sur un point.

Le candidat choisit les quatre questions auxquelles il répond et indique clairement leur numéro sur sa copie en début d'exercice.

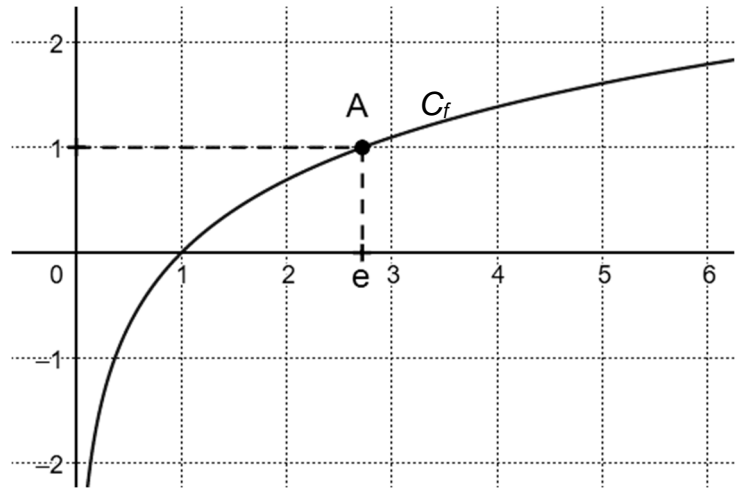
Question 1

On a tracé dans le repère orthonormé ci-contre la courbe représentative C_f de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :
 $f(x) = \ln(x)$.

On note A le point de C_f de coordonnées $(e ; 1)$.

On note T la tangente à la courbe C_f au point A.

La tangente T passe-t-elle par l'origine du repère ? Justifier.



Question 2

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0,5 ; 10]$ par :

$$f(x) = x^2 - x - 2 - 3 \ln(x).$$

On note f' la fonction dérivée de f .

a. Montrer que $f'(x) = \frac{(x+1)(2x-3)}{x}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[0,5 ; 10]$.

b. Montrer que f admet un minimum sur l'intervalle $[0,5 ; 10]$ et préciser la valeur exacte de ce minimum.

Question 3

a. Résoudre dans \mathbf{R} l'équation $e^{-0,0434 x} = 0,01$. On donnera la valeur exacte de la solution.

b. Un signal de puissance initiale $P(0) = 6,75$ mW parcourt une fibre optique. La puissance du signal, exprimée en mW, lorsque celui-ci a parcouru une distance de x kilomètres depuis l'entrée est donnée par $P(x) = 6,75 e^{-0,0434 x}$.

Quelle est la distance parcourue par le signal lorsque celui-ci aura perdu 99 % de sa puissance ? On arrondira le résultat obtenu au kilomètre.

Question 4

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 3 e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $z_B = -1 + i\sqrt{3}$.

Les points O, A et B sont-ils alignés ?

Question 5

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1 ; 2]$ par :

$$f(x) = x + e^x - \frac{1}{x}.$$

On a tracé dans le repère orthonormé ci-contre la courbe représentative C_f de la fonction f .

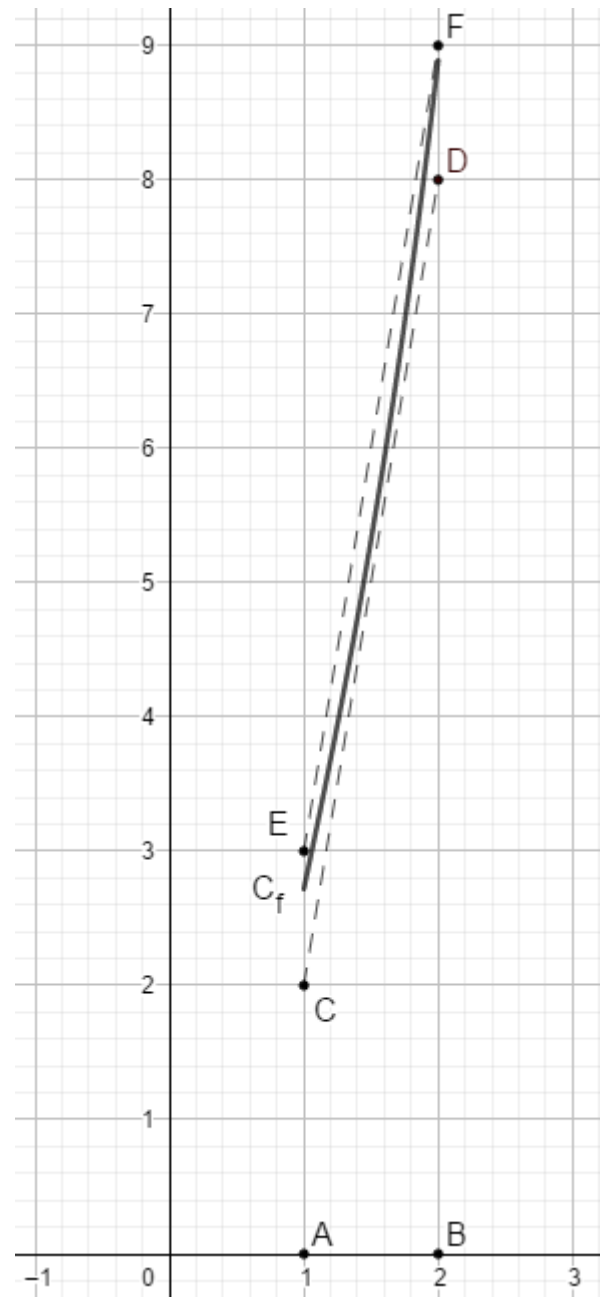
On considère les points A(1 ; 0) ; B(2 ; 0) ; C(1 ; 2) ; D(2 ; 8) ; E(1 ; 3) et F(2 ; 9).

On admet que la courbe C_f est au-dessus du segment [CD] et en dessous du segment [EF].

a. À l'aide du graphique, donner un encadrement d'amplitude 1 de l'intégrale :

$$\int_1^2 f(x) dx.$$

b. Calculer la valeur exacte de $\int_1^2 f(x) dx$.



Question 6

Rappel : Pour a et b deux réels, on a les formules suivantes :

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

La tension u aux bornes d'un générateur, exprimée en volt, dépendant du temps t , exprimé en seconde, est donnée à l'instant t par : $u(t) = 120 \cos(70t) - 120 \sin(70t)$.

a. Montrer que, pour tout t de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, $u(t) = 120\sqrt{2} \cos\left(70t + \frac{\pi}{4}\right)$.

b. En déduire la fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$, exprimée en Hz, délivrée par le générateur, où ω désigne la pulsation. On arrondira le résultat à l'unité.