EXERCICE 3 commun à tous les candidats (4 points)

(mathématiques)

Le candidat doit traiter quatre questions parmi les six que comporte l'exercice. Les questions sont indépendantes. Chacune d'elles est notée sur un point.

Le candidat choisit les quatre questions auxquelles il répond et indique clairement leur numéro sur sa copie en début d'exercice.

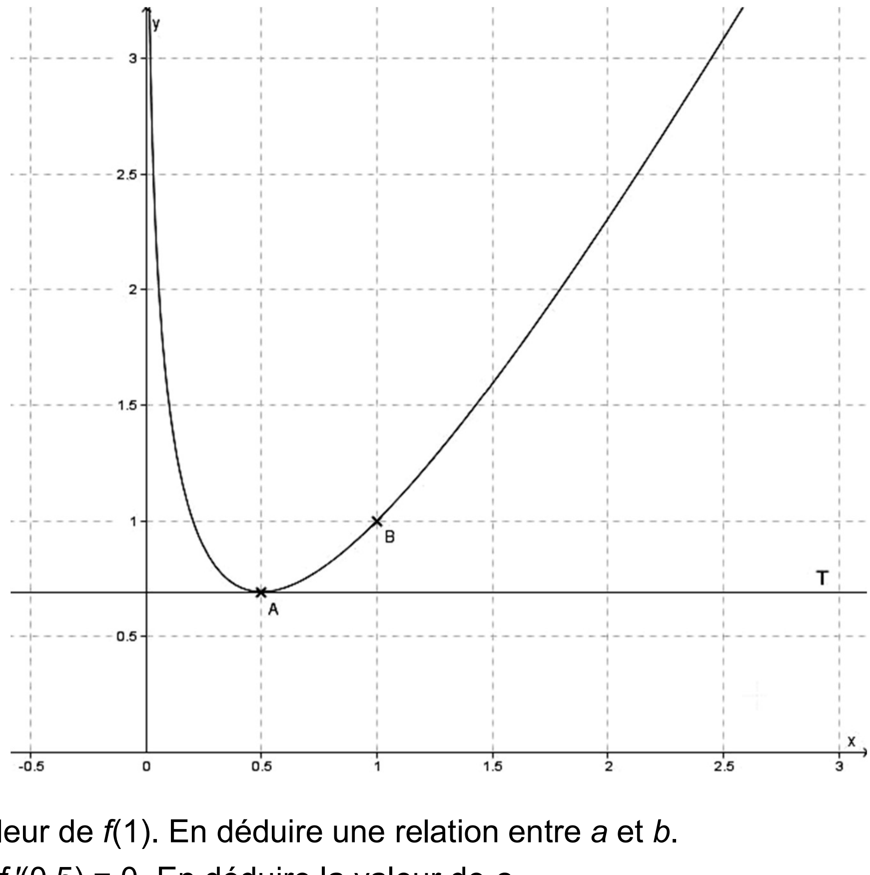
Question 1

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = ax + b - \ln(x)$ où a et b sont des nombres réels. On note C_f la courbe représentative de f tracée dans le repère ci-dessous.

On note A le point d'abscisse 0,5 appartenant à la courbe C_f.

On note T la tangente à la courbe C_f au point A. La droite T est parallèle à l'axe des abscisses.

Le point B(1 ; 1) appartient à la courbe C_f.



a. Donner la valeur de $f(1)$. En déduire une relation entre a et b.

b. Justifier que $f'(0,5) = 0$. En déduire la valeur de a.

c. En déduire la valeur de b.

Question 2

Une entreprise achète une machine d'une valeur de 300 000 €. Cette machine perd de sa valeur au fil des années. Cette perte exprimée en euro, à l'instant t exprimé en année, est modélisée par la fonction f définie sur [0 ; 15] par :

$$f(t) = 300\,000\,(1 - e^{-0,09\,t}).$$

Au bout de combien d'années (résultat arrondi à l'unité) la machine aura-t-elle perdu la moitié de sa valeur ?

Question 3

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2x - 1 - \ln(x)$.

a. Montrer que pour tout x appartenant à $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2x-1}{x}$.

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$ en faisant figurer la valeur exacte de son extremum. On précisera les limites aux bornes de l'intervalle.

Question 4

a. On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 0,0434\,y = 0$.

Déterminer sur $[0\,;+\infty[$ la solution P de cette équation différentielle qui vérifie la condition initiale $y(0) = 6,75$.

b. Un signal de puissance initiale $P(0) = 6,75$ mW parcourt une fibre optique. La puissance du signal, exprimée en mW, lorsque celui-ci a parcouru une distance de x kilomètres depuis l'entrée de la fibre optique, est donnée par $P(x)$ où P est la fonction déterminée à la question **a**.

Montrer que la perte de puissance une fois que le signal a parcouru un kilomètre depuis l'entrée est d'environ 287 μW.

Question 5

Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = (x^2 + 5x + 4)\,e^x$.
Soit F la fonction définie sur **R** par $F(x) = (x^2 + 3x + 1)\,e^x$.

a. Montrer que, pour tout x appartenant à **R**, $F'(x) = f(x)$.

b. Calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Question 6

Rappel : Pour a et b deux réels, on a les formules suivantes : $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$ $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$ $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

La tension u aux bornes d'un générateur dépendant du temps t est donnée par :

$$u(t) = 240 \cos(50t) - 240 \sin(50t).$$

La tension u est exprimée en volt et le temps t est exprimé en seconde.

a. Montrer que pour tout t appartenant à $[0\,;+\infty[$, $u(t) = 240\sqrt{2}\,\cos\left(50t + \frac{\pi}{4}\right)$.

b. En déduire la fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$, exprimée en Hz, délivrée par le générateur, où ω désigne la pulsation. On arrondira le résultat à l'unité.