EXERCICE 3 (4 points)

(mathématiques)

Le candidat doit traiter quatre questions parmi les six numérotées de 1 à 6 que comporte l'exercice. Les questions sont indépendantes les unes des autres. Le candidat choisit les quatre questions auxquelles il répond et indique clairement leur numéro sur sa copie en début d'exercice. Seules ces questions sont évaluées. Chacune d'elles est notée sur un point. Traiter une question supplémentaire ne rapporte aucun point.

Question 1

Pour chacune des deux questions suivantes, une seule des quatre réponses est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un demi-point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse ne rapportent, ni n'enlèvent aucun point.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

1. Le nombre $\ln(35)$ est égal à :
a. $\ln(5) \times \ln(7)$ **b.** $\ln(5) + \ln(7)$ **c.** $\ln(30) + \ln(5)$ **d.** $\ln(30) \times \ln(5)$

2. Le nombre e^{20} est égal à :
a. $\mathrm{e}^4 \times \mathrm{e}^5$ **b.** $\mathrm{e}^4 + \mathrm{e}^5$ **c.** $\mathrm{e}^5 + \mathrm{e}^{15}$ **d.** $\mathrm{e}^5 \times \mathrm{e}^{15}$

Question 2

Lors d'une course, on a mesuré la fréquence cardiaque d'un coureur de 100 m.
Cette fréquence cardiaque, en battements par minute, est modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;\,100]$ par $f(x) = 28\ln(x+1) + 70$ où x est la distance parcourue, en mètre, depuis le départ de la course.
1. Selon ce modèle, quelle est la fréquence cardiaque de ce coureur au départ de la course ?
2. Selon ce modèle, au bout de combien de mètres la fréquence cardiaque de ce sportif est-elle égale à 185 battements par minute ? Arrondir à l'unité.

Question 3

La température d'un four, exprimée en degré Celsius, en fonction du temps t, exprimé en minute, est modélisée par une fonction f définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, solution de l'équation différentielle $(E)\ :\ y' = -0{,}2\,y + 44$.

1. Déterminer les solutions de cette équation différentielle sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. On suppose que la température initiale du four est $25\ ^\circ\mathrm{C}$.
En prenant $f(0) = 25$, donner une expression de $f(t)$, pour tout t de $[0\,;\,+\infty[$.

Question 4

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On pose $z = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et $z' = -\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

1. Déterminer la forme exponentielle de z. Détailler les calculs.

2. En déduire la forme exponentielle de $\frac{z}{z'}$.

Question 5

L'iode 131 est un élément radioactif qui se désintègre selon la loi $\mathrm{N}(t) = \mathrm{N}(0)\,\mathrm{e}^{-0{,}086\,t}$, où N(0) est le nombre de noyaux au début de l'observation et N(t) le nombre de noyaux à l'instant t, exprimé en jour.
Déterminer le temps au bout duquel la moitié des noyaux d'iode 131 se sont désintégrés (demi-vie). On donnera le résultat en nombre de jours arrondi à l'unité.

Question 6

On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$.

1. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.

2. Montrer que, pour tout nombre réel x, $f(x) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Rappel : pour a et b deux réels, on a les formules suivantes :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$