EXERCICE 3 commun à tous les candidats (4 points)

Dans cet exercice, seulement 4 questions au choix parmi les 6 questions proposées sont à traiter.

Toutes ces questions sont indépendantes les unes des autres.

Question 1

Une entreprise réalise des bouchons par injection plastique. On modélise la température (en degré Celsius) d'un bouchon plastique à l'issue de sa fabrication, en fonction du temps t (en seconde) par l'équation différentielle :

$$y' = -\,0{,}1y + 7\,.$$

Montrer que la fonction θ définie par $\theta(t) = 80\mathrm{e}^{-0{,}1t} + 70$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$ est solution de cette équation différentielle et qu'elle vérifie la condition initiale $\theta(0) = 150$.

Question 2

Soit le nombre complexe $z = -1 + \mathrm{i}$.

a. Montrer que $z = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$.

b. Quelle est la partie imaginaire de z^4 ? Justifier.

Question 3

Une voiture électrique, dont l'accumulateur est totalement déchargé, est branchée à une borne de rechargement. L'énergie emmagasinée par l'accumulateur (en kilowattheure), notée E, peut être modélisée en fonction du temps t écoulé (en heure) par la fonction E définie pour $t \in [0;+\infty[$ par :

$$E(t) = 18(1 - \mathrm{e}^{-0{,}45t})\,.$$

On admet que cette voiture a une énergie de stockage limitée à $18\ \mathrm{kWh}$.
Déterminer l'instant t_0, arrondi à la minute, à partir duquel la moitié de cette énergie de stockage limite a été emmagasinée.

Question 4

On considère une fonction f dérivable sur $]0;+\infty[$ dont la fonction dérivée f' est donnée, pour tout $x \in\,]0;+\infty[$, par $f'(x) = \frac{-3x+2}{x}$.
Étudier le sens de variation de la fonction f sur $]0;+\infty[$.

Question 5

On considère l'équation : $3\ln(x) - \ln(x+30) = 2\ln(5)$, où x appartient à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
Donner, parmi les quatre propositions suivantes, la solution de cette équation.

a. 0

b. e^{-5}

c. 10

d. 20

Question 6

Une société de peinture utilise, dans le cadre de son activité, une nacelle élévatrice (dite « nacelle à ciseaux »).
On note $h(t)$ la hauteur (en mètre) de la nacelle à l'instant t (en seconde) suivant la mise en route.
On suppose que h est la fonction de la variable réelle t définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ d'expression $h(t) = -15\mathrm{e}^{-0,2t} + 18$.

D'après : https://www.haulotte.fr/produit/h18-sx (téléchargé le 29/09/20)

a. Déterminer la hauteur initiale de la nacelle.
b. Déterminer la limite de la fonction h en $+\infty$. Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.