***Exercice 5** : Exercice de mathématiques commun à tous les candidats*

Le candidat doit traiter quatre questions parmi les six numérotées de 1 à 6 que comporte l'exercice. Les questions sont indépendantes.

Le candidat choisit les quatre questions auxquelles il répond et indique clairement leur numéro sur sa copie en début d'exercice. Seules ces questions sont évaluées. Chacune d'elles est notée sur un point.
Traiter une question supplémentaire ne rapporte aucun point.

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, et i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Question 1. On considère le nombre complexe $z_1 = \frac{2-6\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$.

Déterminer la forme algébrique de z_1.

Question 2. Soit z_2 le nombre complexe défini par : $z_2 = -2-2\mathrm{i}$.

a. Déterminer la forme exponentielle de z_2.

b. Montrer que z_2^4 est un nombre réel que l'on déterminera.

Question 3. On considère A, B et C les points du plan d'affixes respectives :

$$z_A = 2-2\mathrm{i},\ z_B = -2-2\mathrm{i} \text{ et } z_C = -4\mathrm{i}.$$

a. Placer les points A, B et C dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité 1 cm.

b. Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.

Question 4. On considère l'équation différentielle $y' + 5y = 7$ où y est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Résoudre cette équation différentielle.

b. Préciser l'expression de la solution f vérifiant $f(0) = 4$.

Question 5. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $g(x) = x\ln(x) - x + 4$.

a. On admet que g est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$, et on note g' sa fonction dérivée. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $g'(x) = \ln(x)$.

b. En déduire le sens de variation de g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Question 6. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$.

a. Calculer la limite de h en $-\infty$.

b. Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$.

On admet que h est strictement décroissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$ et que l'équation $h(x) = 0{,}5$ admet une unique solution dans l'intervalle $[2;+\infty[$ que l'on note a.

c. Recopier le programme ci-dessous et compléter les pointillés pour que la fonction `sol_bal` détermine une valeur approchée à 10^{-n} près de a par balayage.

```
from math import exp

def sol_bal(n) :
  x = 2
  while … >0.5 :
    x = …
  return x
```