Exercice 3 (4 points)

Cet exercice est composé de quatre questions indépendantes.

Question 1

a. On considère l'équation différentielle

$$(E) : \ y' + 100\, y = 8.$$

Déterminer la solution v définie sur $[0\,;+\infty[$ de cette équation différentielle, qui vérifie la condition initiale $v(0) = 0$.

b. La fonction v déterminée à la question précédente modélise la vitesse (exprimée en m.s^{-1}) de chute d'une bille dans un liquide visqueux en fonction du temps t écoulé depuis le début de la chute (exprimé en s).
Déterminer la vitesse, arrondie à 0,001 m.s^{-1}, de la bille après 0,01 seconde de chute.

Question 2

Rappel : Pour a et b deux réels, on a les formules suivantes :
- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

La tension u (exprimée en volt) aux bornes d'un dipôle en fonction du temps t (exprimé en seconde) est donnée par :

$$u(t) = \frac{7\sqrt{3}}{4}\cos(100t) - \frac{7}{4}\sin(100t)$$

a. Transformer l'écriture de u sous la forme $u(t) = U_{max}\cos(\omega t + \varphi)$ où :
- U_{max} représente la tension maximale (exprimée en V) ;
- ω représente la pulsation (exprimée en rad.s^{-1}) ;
- φ représente le déphasage (exprimé en rad).

b. En déduire la valeur du déphasage φ de $u(t)$.

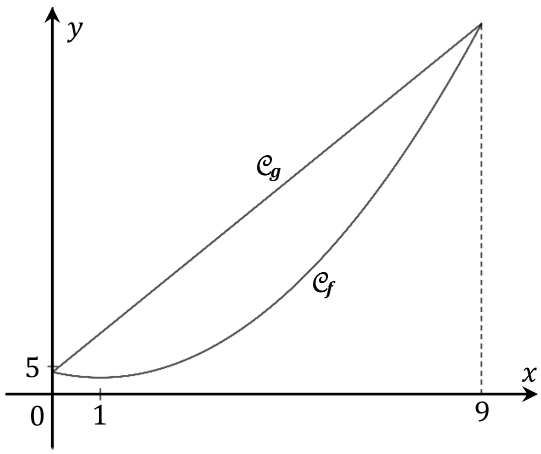
Question 3

On considère les deux fonctions *f* et *g* définies et continues sur [0 ; 9] respectivement par :

- $f(x) = x^2 - 2x + 4$
- $g(x) = 7x + 4$

Les représentations graphiques des deux fonctions sont données ci-contre.

Déterminer la valeur exacte de l'aire, exprimée en unité d'aire, située entre les courbes représentatives de ces deux fonctions.



Question 4

La tension $u_c(t)$ (exprimée en volt), aux bornes d'un condensateur lors de sa charge, est modélisée par :

$$u_c(t) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right) \text{ où } t \text{ désigne le temps, exprimé en seconde.}$$

Les caractéristiques du condensateur utilisé sont :
- Tension maximale : $E = 4\ \text{V}$
- Résistance : $R = 10^3\ \Omega$
- Capacité : $C = 2.10^{-3}\ \text{F}$

Déterminer le temps de charge t (exprimé en seconde, arrondi à 0,1 s près) nécessaire pour obtenir une tension aux bornes du condensateur égale à la moitié de sa tension maximale.