

EXERCICE 1 (4 points)

(physique-chimie et mathématiques)

Bouteille isotherme avec indicateur de température interne

Une bouteille isotherme est conçue pour conserver des boissons chaudes ou froides. Une entreprise a développé une bouteille isotherme avec un afficheur de la température de la boisson. À l'issue de la réalisation d'un prototype, les techniciens réalisent une série de tests pour contrôler la qualité du produit. Les deux critères ci-dessous restent à valider pour respecter le cahier des charges de l'entreprise et ainsi passer à la mise en place de la chaîne de production industrielle.

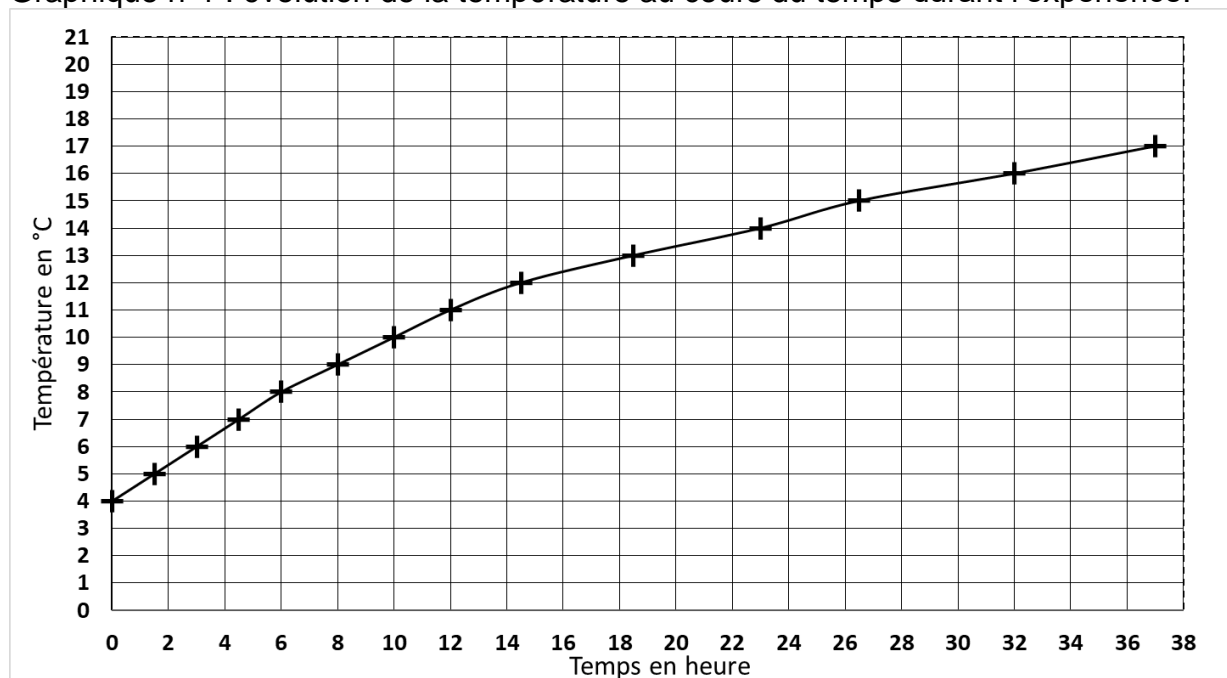


Critère n°1 : la variation de température d'une boisson doit être inférieure ou égale à 5 °C avec une tolérance de 0,5 °C au bout de 8 heures pour une température extérieure de $\theta_{\text{ext}} = 20,0$ °C.

Critère n°2 : la variation de la température ne doit pas excéder 1 °C·h⁻¹.

La bouteille isotherme possède une sonde de température sur la face interne du bouchon et un afficheur sur sa face externe. Après avoir rempli et refermé la bouteille, un technicien relève la température indiquée sur l'afficheur de la bouteille pendant une durée totale de 37 heures. La température extérieure est maintenue à 20 °C durant toute l'expérience.

Graphique n°1 : évolution de la température au cours du temps durant l'expérience.



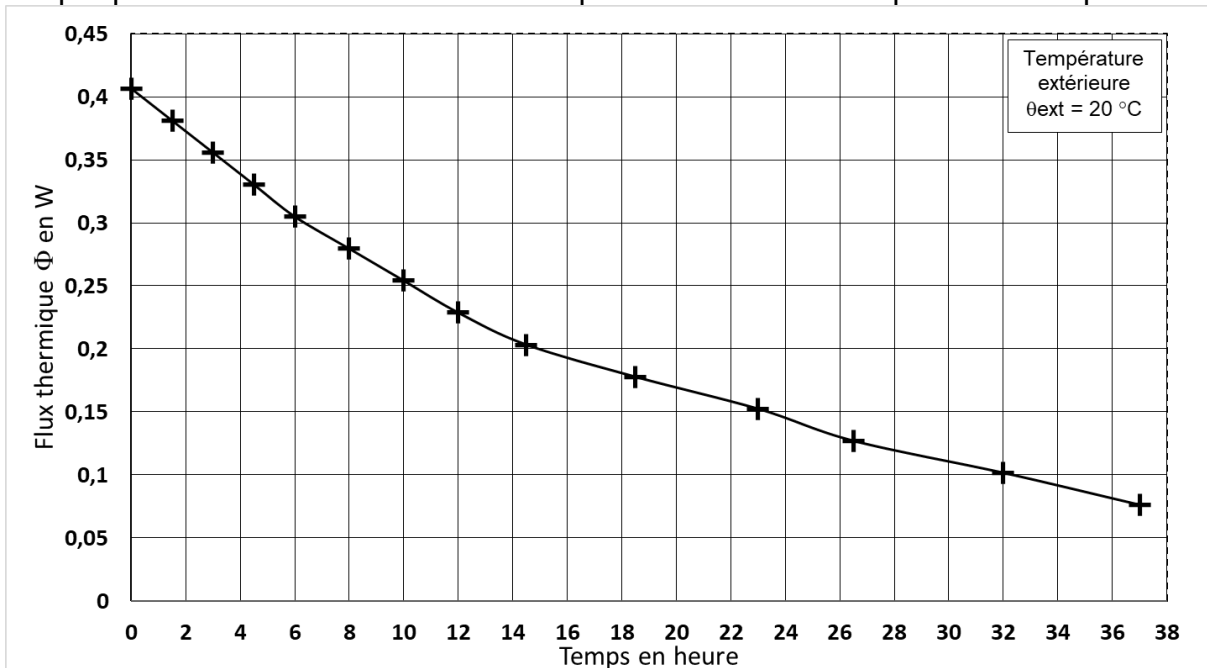
1. À partir des mesures effectuées, indiquer la valeur de la température initiale de la boisson dans la bouteille ainsi que le sens du transfert thermique à travers les parois de la bouteille isotherme.

2. À partir du graphique n°1, établir si l'entreprise va pouvoir commencer la production de cette bouteille isotherme en l'état ou si les ingénieurs doivent encore faire évoluer le produit.

Définition du flux thermique :

$\Phi = \frac{S \times (\theta_{\text{ext}} - \theta)}{R}$	Φ : flux thermique à travers la paroi (en W)
	S : surface de la bouteille $S = 4,32 \times 10^{-2} \text{ m}^2$
	θ_{ext} : température extérieure (en °C)
	θ : température de la boisson (en °C)
	R : résistance thermique de la paroi (en $\text{m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$)

Graphique n°2 : évolution du flux thermique Φ au cours du temps durant l'expérience.



3. Justifier l'allure de la courbe en donnant l'évolution du flux thermique au cours du temps.
4. Calculer la résistance R des parois en relevant, sur les deux graphiques, les valeurs du flux thermique et de la température de la boisson à un instant donné.
5. Comparer la résistance thermique obtenue avec celles du tableau ci-dessous puis en déduire la constitution des parois de la bouteille.

Matériau (même épaisseur que la paroi de la bouteille)	R en $\text{m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$
Liège expansé	0,175
Polystyrène expansé	0,184
Air	0,292
Polyuréthane	0,318
Vide	supérieure à 1,40

On souhaite vérifier le critère n°1 dans le cas d'une boisson chaude.

L'évolution de la température (en °C) de la boisson en fonction du temps (en heure) est modélisée par la fonction f solution de l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y' = - 0,044y + 0,88 \text{ où } y \text{ est une fonction définie sur } \mathbb{R} \text{ et } y' \text{ sa dérivée.}$$

6. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
7. Sachant que la température initiale de la boisson est de 60°C, montrer que f est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = 40e^{-0,044t} + 20$.
8. En déduire la température de la boisson au bout de 8 heures. Indiquer si le critère n°1 est vérifié.