Exercice 3 (4 points)

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

Question 1

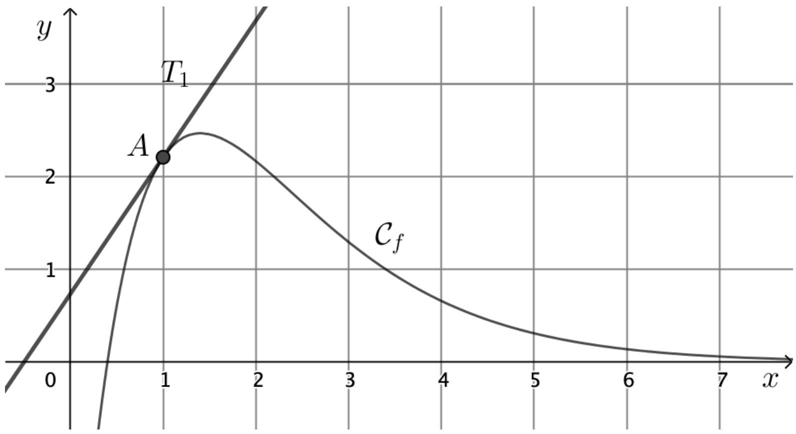
On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
Soient z_1 et z_2 les nombres complexes définis par :

$$z_1 = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$$

a) Écrire z_1 sous forme exponentielle, en détaillant les calculs.
b) Montrer que $2{z_2}^3 = z_1$.

Question 2

Soit la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = (10x - 4)\mathrm{e}^{-x}$.
On nomme $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f donnée dans le repère ci-dessous.
La droite T_1 est la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1 et on admet que la dérivée de f est définie pour tout réel x par $f'(x) = (-10x + 14)\mathrm{e}^{-x}$.



a) Calculer la valeur exacte de l'ordonnée du point A.
b) Calculer $f'(1)$.
Interpréter graphiquement cette valeur.
c) La courbe représentative de la fonction f suggère l'existence d'un maximum sur l'intervalle $[1; 2]$.
Quelle est la valeur exacte de ce maximum ?