EXERCICE 3 (4 points)

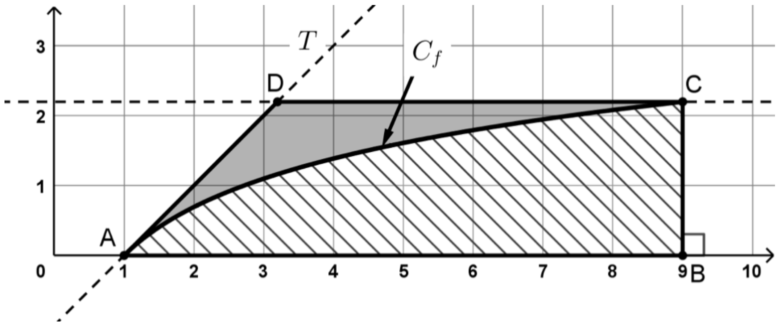
(mathématiques)

Le candidat traitera 4 questions au choix parmi les 6 questions proposées.

Les questions sont indépendantes. Chacune d'elles est notée sur un point.
Le candidat choisit les quatre questions auxquelles il répond et indique clairement leur numéro sur sa copie en début d'exercice.

Les questions 1, 2 et 3 reposent sur la figure 1 donnée ci-dessous :

Figure 1



- Sur la figure 1 ci-dessus, l'unité de longueur est le centimètre ;
- la courbe C_f tracée est celle de la fonction f définie sur $[1; 9]$ par $f(x) = \ln(x)$;
- la droite T est la tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse 1 ;
- le point B a pour coordonnées $(9\,;0)$;
- C est le point de C_f d'abscisse 9 ;
- la parallèle à l'axe des abscisses passant par C coupe la droite T au point D.

On désigne par Δ le domaine hachuré sur la figure 1, délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et le segment [BC]. On note A_2 l'aire de Δ, exprimée en cm².

Question 1. Calcul de l'aire A_1 du trapèze ABCD.

1.a. Justifier que la tangente T a pour équation réduite $y = x - 1$.

On admet que le point D a pour coordonnées : $(2\ln(3) + 1\,; 2\ln(3))$.

1.b. Démontrer que la valeur de A_1, exprimée en cm², est égale à :

$$16\ln(3) - 2\,(\ln(3))^2.$$

Question 2. Dans le but d'utiliser la méthode des rectangles pour estimer A_2, on a écrit la fonction Python ci-dessous :

```
from math import log as ln

def meth_rect(pas):
  s = 0
  x = 1
  while x<9 :
    s = s+ln(x)*pas
    x = x+pas
  return s
```

2.a. Laquelle des figures ci-dessous correspond à l'exécution de l'instruction `meth_rect(2)` ? *Aucune justification n'est attendue.*

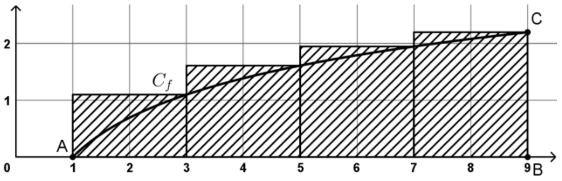


Figure 2

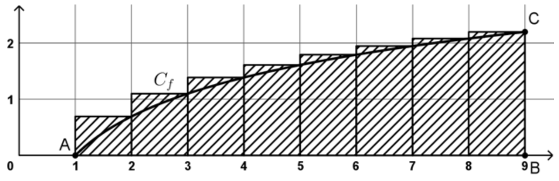


Figure 3

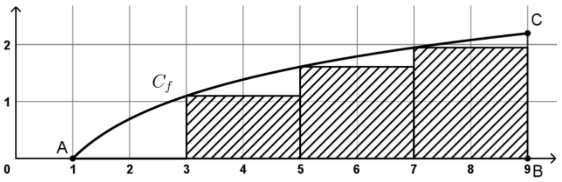


Figure 4

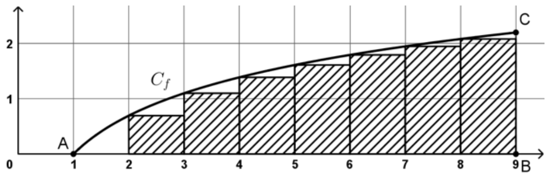


Figure 5

2.b. Comparer A_2 à la valeur 9,307920700315046 renvoyée par l'exécution de `meth_rect(2)`.

Question 3. Calcul de la valeur exacte de A_2 .

3.a. Démontrer que la fonction F définie sur $[1\,;9]$ par $F(x) = x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction f sur $[1\,;9]$.

3.b. En déduire la valeur exacte de A_2.

Question 4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

4.a On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée. Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = (-3x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

4.b Étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Question 5. Le triangle PQR a les propriétés suivantes où la mesure de l'angle est exprimée en radians :

- $\mathrm{PQ} = 5$
- $\mathrm{QR} = 3$
- $\widehat{\mathrm{PQR}} = \frac{\pi}{3}$

Déterminer la longueur PR.

Question 6. Soit φ un réel appartenant à l'intervalle $[0, \pi[$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \cos(3t+\varphi)$.

6.a Montrer que pour tout réel t, $f''(t) + 9f(t) = 0$.

6.b Déterminer la valeur de φ telle que $f(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.