EXERCICE 3 (4 points)

Mathématiques

Filtre et fonction de transfert

Un filtre dans un circuit électrique permet de transmettre sélectivement certaines composantes du spectre en fréquence d'un signal.
On considère le filtre, composé d'une résistance R et d'un condensateur C.

On appelle fonction de transfert de ce filtre, la fonction H définie par :

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + RC\omega \cdot \mathrm{i}}$$

où :

- i *est le nombre complexe de module 1 et d'argument* $\frac{\pi}{2}$ *vérifiant* $\mathrm{i}^2 = -1$;
- R *est la résistance, exprimée en Ohm, ayant pour valeur* $10^6\ \Omega$;
- C *est la capacité du condensateur, exprimée en Farad, ayant pour valeur* 10^{-6} F ;
- ω *est la pulsation du signal aux bornes du circuit, exprimée en* rad·s $^{-1}$.

La pulsation de coupure du filtre est définie par $\omega_c = \frac{1}{RC}$ ·

1. Calculer ω_c, puis montrer que $H(\omega_c) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$.

2. Écrire $H(\omega_c)$ sous forme exponentielle.

La réponse en gain du circuit, notée G_{dB} et exprimée en décibel, vaut pour cette fréquence de coupure :

$$G_{dB} = 20\log(|H(\omega_c)|)$$

où $|H(\omega_c)|$ est le module de $H(\omega_c)$.

3. Montrer que $G_{dB} = -10\log(2)$.

On pose en cascade un deuxième filtre identique de même pulsation de coupure qui est tel que la fonction de transfert de ces deux filtres, notée $H_T(\omega_c)$, est égale au produit des fonctions de transfert de chacun des deux filtres. Ainsi :

$$H_T(\omega_c) = H(\omega_c) \times H(\omega_c).$$

4. Déduire de la **question 2** le module et un argument de $H_T(\omega_c)$.