

## Exercice 2 – La yaourtière (5,5 points)

La préparation de yaourt « maison » à partir de lait est une pratique de plus en plus courante. Cette préparation repose sur une prise en masse progressive du lait sous l'action de ferments lactiques pendant environ 8 heures, à la température de 43 °C, qui est maintenue automatiquement dans la yaourtière. Il faut encore attendre 2 heures pour que les yaourts ainsi préparés refroidissent, à l'air libre puis au réfrigérateur.



*Un exemple de yaourtière*

Les objectifs de cet exercice sont d'étudier quelques aspects de la fabrication d'un yaourt maison, d'estimer son coût puis de modéliser l'étape finale de refroidissement des yaourts dans le réfrigérateur.

### 1. Fabrication des yaourts dans la yaourtière

Certains ferments lactiques utilisés pour la fabrication des yaourts maison contiennent des bactéries alimentaires qui présentent un optimum de croissance à la température de 43 °C.

La yaourtière utilisée permet la préparation de 7 yaourts. On utilise la recette suivante :

- verser 700 mL de lait à la température ambiante dans un récipient ;
- ajouter un sachet de 2 g de ferments lactiques puis mélanger ;
- répartir la préparation dans les 7 pots en verre de la yaourtière et les fermer à l'aide d'un couvercle ;
- phase de chauffage : mettre les 7 pots dans la yaourtière, fermer la yaourtière, la démarrer et la faire fonctionner pendant 8 heures ;
- phase de refroidissement : laisser refroidir les pots puis les mettre au réfrigérateur pendant 2 heures.

Afin d'effectuer des bilans d'énergie, on définit le système étudié, noté {S}, constitué de la yaourtière contenant les 7 pots en verre fermés et remplis. On admet que tous les composants du système {S} sont à la même température.

Lors de la phase de chauffage de 8 heures, il est possible de distinguer deux étapes :

- étape A : chauffage du système {S} de la température ambiante à la température de 43 °C pendant une durée  $\Delta t_A$  ;
- étape B : maintien en continu du système {S} à la température de 43 °C pendant une durée  $\Delta t_B$ .

#### **Données :**

- conversion d'une énergie en wattheure (Wh) en une énergie en joule (J) : 1 kWh = 3 600 kJ ;
- puissance électrique moyenne consommée par la yaourtière durant l'étape A :  $P_A = 150$  W ;
- puissance électrique moyenne consommée par la yaourtière durant l'étape B :  $P_B = 20$  W ;
- estimation de la capacité thermique du système {S} :  $C = 4,0 \times 10^3$  J·K<sup>-1</sup> ;
- température de fabrication d'un yaourt :  $\theta_{fab} = 43$  °C ;
- température de l'air ambiant :  $\theta_{amb} = 20$  °C.

**Q1.** Montrer que la valeur de l'énergie thermique  $Q_{chauffage}$  qui doit être transférée au système {S} lors de l'étape A est voisine de  $9,2 \times 10^4$  J.

**Q2.** Calculer la durée  $\Delta t_A$  de l'étape A, en supposant que, pendant cette étape, 85 % de l'énergie électrique consommée par la yaourtière est fournie par transfert thermique au système {S}. En déduire que la durée  $\Delta t_B$  de l'étape B est de l'ordre de 7 heures et 50 minutes.

Un des arguments souvent avancés qui encouragent à faire ses yaourts soi-même est le prix : à qualité égale, ils coûteraient moins cher que ceux achetés directement dans la grande distribution.

On donne des coûts approximatifs ci-dessous :

|                  |             |                           |  |
|------------------|-------------|---------------------------|--|
| 1 kWh électrique | 1 L de lait | 2 g de ferments lactiques | 1 pot de yaourt nature de grande distribution et de qualité comparable à celui fait maison |
| 0,20 €           | 1,05 €      | 0,64 €                    | 0,35 €   |

**Q3.** Estimer le prix de fabrication d'un yaourt fait maison. Discuter si l'argument lié au coût des yaourts maison est vérifié.

## 2. Refroidissement des yaourts dans le réfrigérateur

Dans cette partie, on étudie le refroidissement d'un seul pot de yaourt.

Après avoir passé 8 h dans la yaourtière, le pot de yaourt, avec son couvercle, est d'abord refroidi à l'air jusqu'à atteindre la température de 30 °C. On étudie dans cette partie la seconde phase de refroidissement à partir de l'instant initial où le pot de yaourt est placé dans le réfrigérateur.

Le système d'étude est noté {P} ; il comprend le pot en verre, le couvercle et le yaourt qu'il contient. On admet que tous ses composants sont à la même température.

### Données :

- loi de Newton donnant l'expression du flux thermique  $\Phi$ , en watt, cédé par le système {P} de température  $\theta$ , en contact avec l'air intérieur du réfrigérateur de température  $\theta_{\text{réfri}}$  :

$$\Phi = h \cdot S \cdot (\theta - \theta_{\text{réfri}})$$

avec : •  $h$ , coefficient de transfert thermique surfacique :  $h = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$  ;

•  $S$ , surface d'échange entre l'air de l'intérieur du réfrigérateur et le système {P} :  $S = 0,019 \text{ m}^2$ .

- masse du système {P} :  $m = 0,19 \text{ kg}$  ;
- température, considérée constante, de l'intérieur du réfrigérateur :  $\theta_{\text{réfri}} = 4,0 \text{ °C}$  ;
- température initiale du système {P} :  $\theta_0 = 30 \text{ °C}$  ;
- capacité thermique massique du système {P} :  $c_Y = 2,5 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

**Q4.** Nommer les trois modes de transfert thermique permettant le refroidissement du système {P}.

**Q5.** Calculer la valeur du flux thermique initial  $\Phi_0$  cédé par le système {P} à l'instant initial  $t = 0$  et indiquer, en justifiant, comment varie le flux thermique au cours du temps.

**Q6.** Indiquer la température du système {P} après un temps très long. Montrer que la valeur de l'énergie thermique perdue par le système {P} durant la phase de refroidissement est voisine de 12 kJ.

**Q7.** Calculer la durée  $\Delta t_0$  qui serait nécessaire pour effectuer un transfert thermique de 12 kJ à la puissance  $\Phi_0$ .

En tenant compte de la variation du flux thermique au cours du temps, on montre que l'évolution de la température du système {P} peut être modélisée par la fonction :

$$\theta(t) = (\theta_0 - \theta_{\text{réfri}}) e^{-\frac{t}{\tau}} + \theta_{\text{réfri}} \quad \text{où} \quad \tau = \frac{m c_Y}{h S}$$

**Q8.** Tracer l'allure de l'évolution de la température  $\theta$  en fonction du temps en indiquant les températures initiale et finale ; faire apparaître une méthode graphique de détermination du temps caractéristique  $\tau$ .

**Q9.** Comparer la valeur de  $\tau$  à celle de  $\Delta t_0$  obtenue en **Q7**. Commenter.