

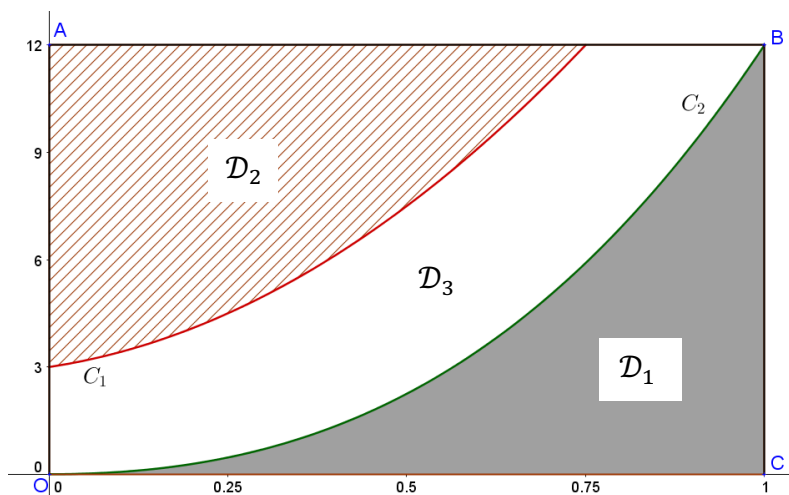
EXERCICE 3 (4 points)

Mathématiques

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie I

Dans un repère orthogonal d'origine O , on considère les points $A(0 ; 12)$, $B(1 ; 12)$ et $C(1 ; 0)$. Dans la figure ci-dessous, deux courbes C_1 et C_2 délimitent un domaine grisé \mathcal{D}_1 , un domaine hachuré \mathcal{D}_2 et un domaine \mathcal{D}_3 non coloré, à l'intérieur du rectangle $OABC$.



La courbe C_2 est la représentation graphique de la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$f(x) = 6x^3 + 6x^2$$

1. Calculer l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$.

On admet que la fonction f est positive sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

2. Interpréter le résultat du calcul précédent dans le contexte de l'exercice.

L'aire du domaine \mathcal{D}_2 hachuré a été calculée (en unité d'aire) à l'aide d'un logiciel et vaut $\frac{135}{32}$.

3. Estimer l'aire en unité d'aire du domaine \mathcal{D}_3 .

Partie II

On considère les nombres complexes $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_2 = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$ où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

4. Écrire le nombre z_1 sous forme exponentielle. Détailler les calculs.
5. Démontrer que le nombre $Z = z_1^2 \times z_2$ est un nombre imaginaire pur en détaillant les calculs.