

Exercice 1 (7 points)

Thème : Fonction logarithme

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Les six questions sont indépendantes.

Une réponse incorrecte, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

- 1- On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \ln(1 + x^2)$.

Sur $\mathbf{R}$, l'équation $f(x) = 2022$

- a- n'admet aucune solution. b- admet exactement une solution.
c- admet exactement deux solutions. d- admet une infinité de solutions.

- 2- Soit la fonction g définie pour tout réel x strictement positif par :

$$g(x) = x \ln(x) - x^2$$

On note C_g sa courbe représentative dans un repère du plan.

- a- La fonction g est convexe sur $]0, +\infty[$. b- La fonction g est concave sur $]0, +\infty[$.
c- La courbe C_g admet exactement un point d'inflexion sur $]0, +\infty[$. d- La courbe C_g admet exactement deux points d'inflexion sur $]0, +\infty[$.

- 3- On considère la fonction f définie sur $] - 1; 1[$ par

$$f(x) = \frac{x}{1 - x^2}$$

Une primitive de la fonction f est la fonction g définie sur l'intervalle $] - 1; 1[$ par :

- a- $g(x) = -\frac{1}{2} \ln(1 - x^2)$ b- $g(x) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$
c- $g(x) = \frac{x^2}{2\left(x - \frac{x^3}{3}\right)}$ d- $g(x) = \frac{x^2}{2} \ln(1 - x^2)$

- 4- La fonction $x \mapsto \ln(-x^2 - x + 6)$ est définie sur

- a- $] - 3; 2[$ b- $] - \infty; 6]$
c- $]0; +\infty[$ d- $]2; +\infty[$

5- On considère la fonction f définie sur $]0,5 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 4x + 3\ln(2x - 1)$$

Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est :

a- $y = 4x - 7$

b- $y = 2x - 4$

c- $y = -3(x - 1) + 4$

d- $y = 2x - 1$

6- L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions dans $\mathbf{R}$ de l'inéquation $\ln(x + 3) < 2\ln(x + 1)$ est :

a- $\mathcal{S} =]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[$

b- $\mathcal{S} =]1; +\infty[$

c- $\mathcal{S} = \emptyset$

d- $\mathcal{S} =]-1; 1[$

Exercice 2 (7 points)

Thème : Géométrie dans l'espace

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points :

$$A(2; 0; 3), B(0; 2; 1), C(-1; -1; 2) \text{ et } D(3; -3; -1).$$

1- Calcul d'un angle.

- a- Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points A , B et C ne sont pas alignés.
- b- Calculer les longueurs AB et AC .
- c- À l'aide du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, déterminer la valeur du cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$ puis donner une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au dixième de degré.

2- Calcul d'une aire.

- a- Déterminer une équation du plan P passant par le point C et perpendiculaire à la droite (AB) .
- b- Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) .
- c- En déduire les coordonnées du projeté orthogonal E du point C sur la droite (AB) , c'est-à-dire du point d'intersection entre la droite (AB) et le plan P .
- d- Calculer l'aire du triangle ABC .

3- Calcul d'un volume.

- a- Soit le point $F(1; -1; 3)$. Montrer que les points A , B , C et F sont coplanaires.
- b- Vérifier que la droite (FD) est orthogonale au plan (ABC) .
- c- Sachant que le volume d'un tétraèdre est égal au tiers de l'aire de sa base multiplié par sa hauteur, calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.