

## EXERCICE 1 (7 points)

### Principaux domaines abordés :

Fonctions, Fonction logarithme ;  
Convexité.

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par

$$f(x) = x^2 - 6x + 4 \ln(x).$$

On admet que la fonction  $f$  est deux fois dérivable sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .

On note  $f'$  sa dérivée et  $f''$  sa dérivée seconde.

On note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthogonal.

1. a. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ . Interpréter graphiquement ce résultat.

b. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

2. a. Déterminer  $f'(x)$  pour tout réel  $x$  appartenant à  $]0 ; +\infty[$ .

b. Étudier le signe de  $f'(x)$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .

En déduire le tableau de variations de  $f$ .

3. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution dans l'intervalle  $[4; 5]$ .

4. On admet que, pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$ , on a :

$$f''(x) = \frac{2x^2 - 4}{x^2}.$$

a. Étudier la convexité de la fonction  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$ . On précisera les valeurs exactes des coordonnées des éventuels points d'inflexion de  $\mathcal{C}_f$ .

b. On note A le point de coordonnées  $(\sqrt{2}; f(\sqrt{2}))$ .

Soit  $t$  un réel strictement positif tel que  $t \neq \sqrt{2}$ .

Soit M le point de coordonnées  $(t; f(t))$ .

En utilisant la question 4.a, indiquer, selon la valeur de  $t$ , les positions relatives du segment  $[AM]$  et de la courbe  $\mathcal{C}_f$ .