

EXERCICE 1 (5 points)

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln(x)$.

On admet que f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Justifier que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ et, en remarquant que $f(x) = 1 + x^2(1 - 2 \ln(x))$, justifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
2. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x) = -4x \ln(x)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1; +\infty[$ et que $\alpha \in [1; e]$.

On admet, dans la suite de l'exercice, que l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $]0; 1]$.

5. On donne la fonction ci-dessous écrite en Python. L'instruction `from lycee import *` permet d'accéder à la fonction `ln`.

```
from lycee import *

def f(x) :
    return 1+x**2-2*x**2*ln(x)

def dichotomie(p) :
    a = 1
    b = 2.7
    while b-a > 10**(-p) :
        if f(a)*f((a+b)/2) < 0 :
            b = (a+b)/2
        else:
            a = (a+b)/2
    return (a,b)
```

On écrit dans la console d'exécution :

```
>>> dichotomie(1)
```

Parmi les quatre propositions ci-dessous, recopier celle affichée par l'instruction précédente ? Justifier votre réponse (on pourra procéder par élimination).

- | | |
|-----------------|----------------------------|
| Proposition A : | (1.75, 1.9031250000000002) |
| Proposition B : | (1.85, 1.9031250000000002) |
| Proposition C : | (2.75, 2.9031250000000002) |
| Proposition D : | (2.85, 2.9031250000000002) |

Partie B

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$, par $g(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$.

On admet que g est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.

On note C_g la courbe représentative de la fonction g dans le plan rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, $g'(x) = \frac{f(x)}{x(1+x^2)^2}$.

2. Démontrer que la fonction g admet un maximum en $x = \alpha$.

On admet que $g(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$.

3. On note T_1 la tangente à C_g au point d'abscisse 1 et on note T_α la tangente à C_g au point d'abscisse α .

Déterminer, en fonction de α , les coordonnées du point d'intersection des droites T_1 et T_α .