

Exercice 1 (5 points)

Un navire assure la liaison entre deux ports de la Méditerranée. Lors d'une traversée, une famille a la possibilité de réserver une cabine ainsi qu'un emplacement pour un véhicule.

Partie A

Parmi l'ensemble des familles effectuant la traversée, on constate que 30 % réservent un emplacement pour un véhicule et, parmi ces dernières, 80 % réservent une cabine.

On sait par ailleurs que 75 % des familles effectuant la traversée réservent une cabine.

On choisit au hasard une famille effectuant la traversée, et on considère les événements suivants :

- V : « la famille réserve un emplacement pour un véhicule » ;
- C : « la famille réserve une cabine ».

Pour un événement quelconque E , on désigne par $\bar{E}$ son événement contraire et par $P(E)$ sa probabilité.

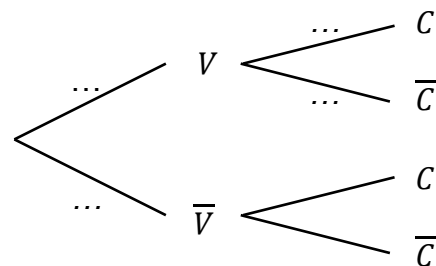
1.

- a. Donner $P(C)$.
- b. Reproduire l'arbre ci-contre et compléter les quatre pointillés.

2. Calculer la probabilité qu'une famille réserve un emplacement pour un véhicule et une cabine.

3. Une famille a réservé une cabine. Déterminer la probabilité qu'elle réserve un emplacement pour un véhicule.

4. Déterminer $P_{\bar{V}}(C)$. On arrondira le résultat à 10^{-2} .
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.



Partie B

Sur ce trajet, la réservation d'une cabine et d'un emplacement pour un véhicule sont facturés en supplément du coût de la traversée.

Ces suppléments sont d'un montant de :

- 100 € pour une cabine ;
- 70 € pour l'emplacement d'un véhicule.

On suppose qu'une famille peut réserver au maximum une cabine et au maximum un emplacement pour un véhicule.

À ces suppléments peuvent s'ajouter le prix payé pour des extras (repas, boissons, etc.).

On note X la variable aléatoire qui associe, à chaque famille effectuant la traversée, le prix qu'elle paie, en euro, pour les suppléments.
On donne ci-dessous la loi de probabilité de X .

x_i	0	70	100	170
$P(X = x_i)$	0,19	0,06	0,51	0,24

On note Y la variable aléatoire qui associe, à chaque famille effectuant la traversée, le prix qu'elle paie, en euro, pour les extras.

On admet que la variable aléatoire Y a pour espérance $E(Y) = 104$ et pour variance $V(Y) = 1686$.

On suppose que les variables X et Y sont indépendantes.

- Justifier que $E(X) = 96$ et que $V(X) = 3114$.
- A titre exceptionnel, la compagnie propose une remise de 40 % sur les suppléments et les extras.
On note Z la variable aléatoire qui, à chaque famille effectuant la traversée, associe le montant total pour les suppléments et les extras, en euro, payé par cette famille après réduction.
 - Justifier que $Z = 0,6(X + Y)$.
 - En déduire que $E(Z) = 120$ et que $V(Z) = 1728$, où $E(Z)$ est l'espérance de la variable aléatoire Z et $V(Z)$ sa variance.
- On note n un entier naturel non nul et on choisit au hasard un échantillon de n familles effectuant cette traversée bénéficiant de la réduction exceptionnelle définie en question 2.

On admet que ce choix peut être assimilé à un tirage avec remise.

On désigne par Z_1 la variable aléatoire égale au prix total pour les suppléments et les extras payé par la première famille, Z_2 la variable aléatoire égale au prix total pour les suppléments et les extras payé par la deuxième famille et ainsi de suite, Z_n la variable aléatoire égale au prix total pour les suppléments et les extras payé par la n -ième famille.

On considère la variable aléatoire $M_n = \frac{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n}{n}$ donnant le prix total moyen pour les suppléments et les extras, payé par ces familles.

On admet que les variables $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ sont indépendantes et suivent la même loi de probabilité que la variable aléatoire Z .

- Montrer que l'espérance $E(M_n)$ de la variable M_n est égale à 120, et que sa variance $V(M_n)$ est égale à $\frac{1728}{n}$.
- Déterminer le plus petit entier n pour lequel l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'affirmer que $P(114 < M_n < 126) \geq 0,85$.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.