Exercice 1 (5 points)

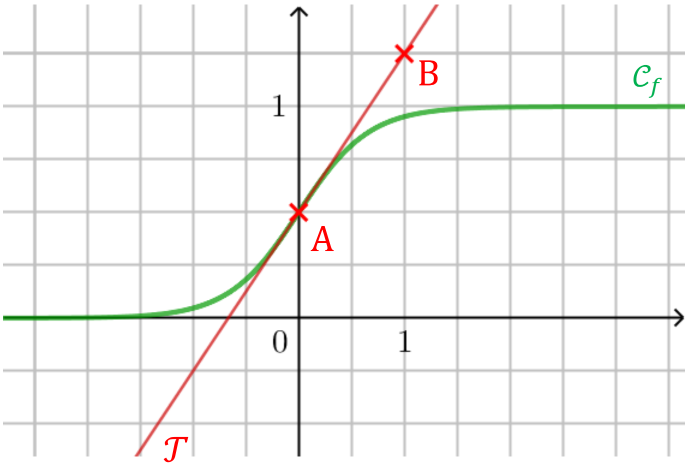
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-3x}}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

On nomme A le point de coordonnées $\left(0\,;\,\frac{1}{2}\right)$ et B le point de coordonnées $\left(1\,;\,\frac{5}{4}\right)$.

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$, et $\mathcal{T}$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.



Partie A : lectures graphiques

Dans cette partie, les résultats seront obtenus par lecture graphique. Aucune justification n'est demandée.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$.
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.

Partie B : étude de la fonction

1. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer l'expression de sa fonction dérivée f'.
2. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. **a.** Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f.
   b. Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction f.
4. Déterminer la valeur exacte de la solution α de l'équation $f(x) = 0{,}99$.

Partie C : Tangente et convexité

1. Déterminer par le calcul une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f.
On admet que f'' est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f''(x) = \frac{9\mathrm{e}^{-3x}(\mathrm{e}^{-3x} - 1)}{(1 + \mathrm{e}^{-3x})^3}$$

2. Étudier le signe de la fonction f'' sur $\mathbb{R}$.
3. **a.** Indiquer, en justifiant, sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est convexe.
   b. Que représente le point A pour la courbe $\mathcal{C}_f$?
4. En déduire la position relative de la tangente $\mathcal{T}$ et de la courbe $\mathcal{C}_f$. Justifier la réponse.

Exercice 2 (5 points)

Partie A

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x - \ln(1 + x)$$

1. Justifier que la fonction f est définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]-1\,;\,+\infty[$.
   Déterminer l'expression de sa fonction dérivée f'.
3. **a.** En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.
   b. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.
4. **a.** Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$, on a :

$$f(x) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\right).$$

   b. En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction f.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n - \ln(1 + u_n).$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1. Donner la valeur arrondie au millième de u_1.
2. En utilisant la question **3.a.** de la **partie A**, démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \geq 0$.
3. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
4. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) converge.
5. Déterminer la limite de la suite (u_n).