

Exercice 1 (5,5 points)

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - x \ln(x)$.

On admet que f est deux fois dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée de la fonction f' .

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

2. Pour tout réel x strictement positif, calculer $f'(x)$.

3. Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$f''(x) = \frac{2x - 1}{x}$$

4. Étudier les variations de la fonction f' sur $]0 ; +\infty[$, puis dresser le tableau des variations de la fonction f' sur $]0 ; +\infty[$.

On veillera à faire apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction f' sur $]0 ; +\infty[$. Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

5. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire pour la résolution de l'équation $f(x) = x$

On considère dans cette partie la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x - \ln(x)$.

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$, on note g' sa dérivée.

1. Pour tout réel strictement positif, calculer $g'(x)$, puis dresser le tableau des variations de la fonction g . Les limites de la fonction g aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

2. On admet que 1 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 1$.

Résoudre, sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, l'équation $f(x) = x$.

Partie C : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = f(u_n) = u_n^2 - u_n \ln(u_n).$$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

2. Justifier que la suite (u_n) converge.

On appelle l la limite de la suite (u_n) et on admet que l vérifie l'égalité $f(l) = l$.

3. Déterminer la valeur de l .