

Exercice 1 (5 points)

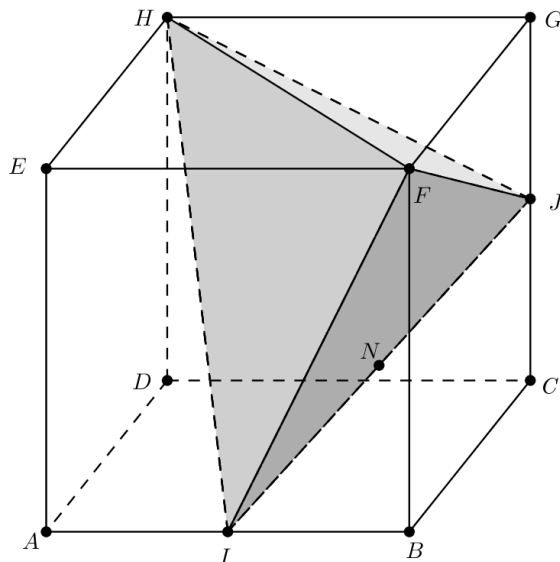
On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous.

Les points I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CG]$.

Le point N est le milieu du segment $[IJ]$.

L'objectif de cet exercice est de calculer le volume du tétraèdre $HFIJ$.

On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1.
 - a. Donner les coordonnées des points I et J . En déduire les coordonnées de N .
 - b. Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{NF}$ ont pour coordonnées respectives :

$$\overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{NF} \begin{pmatrix} 0,25 \\ -0,5 \\ 0,75 \end{pmatrix}.$$

- c. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{NF}$ sont orthogonaux.

On admet que $NF = \frac{\sqrt{14}}{4}$.

- d. En déduire que l'aire du triangle FIJ est égale à $\frac{\sqrt{21}}{8}$.

2. On considère le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

- a. Démontrer que le vecteur $\vec{u}$ est normal au plan (FIJ) .
 - b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (FIJ) est : $4x - y - 2z - 2 = 0$.
 - c. On note d la droite orthogonale au plan (FIJ) passant par le point H . Déterminer une représentation paramétrique de la droite d .

- d. Montrer que la distance du point H au plan (FIJ) est égale à $\frac{5\sqrt{21}}{21}$.

- e. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par la formule $V = \frac{1}{3} \times B \times h$ où B est l'aire d'une base et h la longueur de la hauteur relative à cette base.

Calculer le volume du tétraèdre $HFIJ$. On donnera la réponse sous la forme d'une fraction irréductible.