

Exercice 1 (5 points)

Au basket-ball, il est possible de marquer des paniers rapportant un point, deux points ou trois points.

Les **PARTIES A** et **B** sont indépendantes.

PARTIE A

L'entraîneur d'une équipe de basket décide d'étudier les statistiques de réussite des lancers de ses joueurs. Il constate qu'à l'entraînement, lorsque Victor tente un panier à trois points, il le réussit avec une probabilité de 0,32.

Lors d'un entraînement, Victor effectue une série de 15 lancers à trois points. On suppose que ces lancers sont indépendants.

On note N la variable aléatoire qui donne le nombre de paniers marqués.

Les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.

1. On admet que la variable aléatoire N suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
2. Calculer la probabilité que Victor réussisse exactement 4 paniers lors de cette série.
3. Déterminer la probabilité que Victor réussisse au plus 6 paniers lors de cette série.
4. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire N .
5. On note T la variable aléatoire qui donne le nombre de **points** marqués après cette série de lancers.
 - a. Exprimer T en fonction de N .
 - b. En déduire l'espérance de la variable aléatoire T . Donner une interprétation de cette valeur dans le contexte de l'exercice.
 - c. Calculer $P(12 \leq T \leq 18)$.

PARTIE B

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de points marqués par Victor lors d'un match.

On admet que l'espérance $E(X) = 22$ et la variance $V(X) = 65$.

Victor joue n matches, où n est un nombre entier strictement positif.

On note $X_1, X_2, \dots, X_n$ les variables aléatoires donnant le nombre de points marqués au cours des 1^{er}, 2^e, ..., n -ième matches. On admet que les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et suivent la même loi que celle de X .

On pose $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$.

1. Dans cette question, on prend $n = 50$.
 - a. Que représente la variable aléatoire M_{50} ?
 - b. Déterminer l'espérance et la variance de M_{50} .
 - c. Démontrer que $P(|M_{50} - 22| \geq 3) \leq \frac{13}{90}$.
 - d. En déduire que la probabilité de l'événement « $19 < M_{50} < 25$ » est strictement supérieure à 0,85.
2. Indiquer, en justifiant, si l'affirmation suivante est vraie ou fausse :
 « Il n'existe aucun entier naturel n tel que $P(|M_n - 22| \geq 3) < 0,01$ ».

Exercice 2 (5 points)

Un des objectifs de cet exercice est de déterminer une approximation du nombre réel $\ln(2)$, en utilisant une des méthodes du mathématicien anglais Henry Briggs au 16^e siècle.

On désigne par (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad \text{pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = \sqrt{u_n}.$$

PARTIE A

1. a. Donner la valeur exacte de u_1 et de u_2 .
 b. Émettre une conjecture, à l'aide de la calculatrice, sur le sens de variation et la limite éventuelle de la suite.
2. a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
 b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
 c. Résoudre dans l'intervalle $[0; +\infty[$ l'équation $\sqrt{x} = x$.
 d. Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (u_n) .

PARTIE B

On désigne par (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(u_n)$.

1. a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
 b. Exprimer v_n en fonction de n , pour tout entier naturel n .
 c. En déduire que, pour tout entier naturel n , $\ln(2) = 2^n \ln(u_n)$.
2. On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction $\ln$ et la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
 Une équation de la droite T est $y = x - 1$.
 Les points A_0, A_1, A_2 ont pour abscisses respectives u_0, u_1 et u_2 et pour ordonnée 0.