

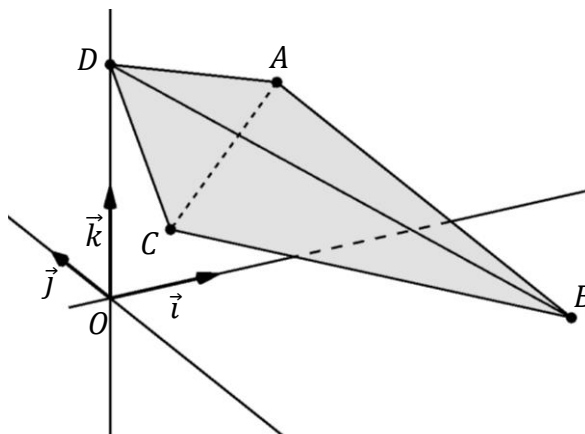
### Exercice 1 (5 points)

Dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ,

on considère les points :

$A(2; 1; 1)$ ,  $B(3; -2; 0)$ ,  $C(0; -1; 1)$

et  $D(0; 0; 2)$ .



1. Montrer que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  définissent un plan.

2.

a. Montrer que le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$  est normal au plan  $(ABC)$ .

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan  $(ABC)$  est :

$$x - y + 4z - 5 = 0.$$

3. Vérifier qu'une représentation paramétrique de la droite  $\Delta$  passant par  $D$  et orthogonale au plan  $(ABC)$  est donnée par :

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2 + 4t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

4. Montrer que le projeté orthogonal de  $D$  sur le plan  $(ABC)$  est

le point  $H \left( -\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{4}{3} \right)$ .

5.

a. Montrer que le triangle  $ABC$  est isocèle en  $B$ .

b. Montrer que l'aire du triangle  $ABC$  est  $3\sqrt{2}$ .

6.

a. En déduire que le volume du tétraèdre  $ABCD$  est égal à 1.

*On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par :  $V = \frac{1}{3}Bh$  où  $B$  est l'aire d'une base et  $h$  la hauteur relative à cette base.*

b. On admet que la distance du point  $A$  au plan  $(BCD)$  est égale à  $\sqrt{2}$ .

En déduire l'aire du triangle  $BCD$ .

7. Dans cette question, on note  $D_k$  le point ayant pour coordonnées  $(0 ; 0 ; k)$  où  $k$  est un réel.
- Déterminer la valeur de  $k$  pour laquelle les points  $A, B, C$  et  $D_k$  sont coplanaires.  
Quel est alors le projeté orthogonal du point  $D_k$  sur le plan  $(ABC)$  ?
  - Peut-on trouver une valeur de  $k$  telle que  $A$  soit le projeté orthogonal de  $D_k$  sur le plan  $(ABC)$  ?

## Exercice 2 (5 points)

Un bassin destiné à l'élevage des truites contient 30 000 litres d'eau, régulièrement renouvelée.

Pour vérifier la présence éventuelle de substances polluantes dans le bassin, on procède à des analyses régulières.

On étudie dans les deux parties ci-dessous un cas de contamination de l'eau par une substance polluante à l'aide de deux modèles différents.

Les deux parties sont indépendantes.

### Partie A : modèle discret

On note  $V_n$  le volume, en litre, de la substance polluante présente dans le bassin,  $n$  heures après le début du phénomène de pollution. On a ainsi  $V_0 = 0$ .

On admet que pour tout entier naturel  $n$ ,  $V_{n+1} = 0,995 V_n + 6$ .

- Calculer  $V_1$  et  $V_2$ .
- Recopier et compléter le programme ci-contre pour qu'il renvoie le volume en litre de substance polluante présente dans le bassin après  $n$  heures.
- Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $V_n \leq V_{n+1} \leq 1200$ .
- Justifier que la suite  $(V_n)$  converge, et calculer sa limite.

```
def volume(n):
    v = ...
    for k in range(n):
        v = .....
    return v
```

### Partie B : modèle continu

On note  $v(t)$  le volume, en litre, de la substance polluante présente dans le bassin à l'instant  $t$ , en heure.

On admet que la fonction  $v$  est définie et dérivable sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ , et on note  $v'$  sa fonction dérivée.

On considère que le phénomène de pollution débute au temps  $t = 0$  ; ainsi  $v(0) = 0$ .

On admet que la fonction  $v$  est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : y' = -0,005y + 6,$$

où  $y$  est une fonction inconnue et où  $y'$  est la fonction dérivée de  $y$ .