

EXERCICE 2 (7 points)

Thème : suites

Dans cet exercice, on considère la suite (T_n) définie par :

$$T_0 = 180 \text{ et, pour tout entier naturel } n, T_{n+1} = 0,955 T_n + 0,9.$$

1.
 - a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $T_n \geq 20$.
 - b. Vérifier que pour tout entier naturel n , $T_{n+1} - T_n = -0,045(T_n - 20)$. En déduire le sens de variation de la suite (T_n) .
 - c. Conclure de ce qui précède que la suite (T_n) est convergente. Justifier.
2. Pour tout entier naturel n , on pose : $u_n = T_n - 20$.
 - a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
 - b. En déduire que pour tout entier naturel n , $T_n = 20 + 160 \times 0,955^n$.
 - c. Calculer la limite de la suite (T_n) .
 - d. Résoudre l'inéquation $T_n \leq 120$ d'inconnue n entier naturel.
3. Dans cette partie, on s'intéresse à l'évolution de la température au centre d'un gâteau après sa sortie du four. On considère qu'à la sortie du four, la température au centre du gâteau est de 180°C et celle de l'air ambiant de 20°C . La loi de refroidissement de Newton permet de modéliser la température au centre du gâteau par la suite précédente (T_n) . Plus précisément, T_n représente la température au centre du gâteau, exprimée en degré Celsius, n minutes après sa sortie du four.
 - a. Expliquer pourquoi la limite de la suite (T_n) déterminée à la question 2. c. était prévisible dans le contexte de l'exercice.
 - b. On considère la fonction Python ci-dessous :

```
def temp( x ) :  
    T=180  
    n=0  
    while T>x :  
        T=0.955*T+0.9  
        n=n+1  
    return n
```

Donner le résultat obtenu en exécutant la commande **temp(120)**.

Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.