

EXERCICE 2 (7 points)

Principaux domaines abordés :
Suites numériques.
Algorithmique et programmation.

Un médicament est administré à un patient par voie intraveineuse.

Partie A : modèle discret de la quantité médicamenteuse

Après une première injection de 1 mg de médicament, le patient est placé sous perfusion. On estime que, toutes les 30 minutes, l'organisme du patient élimine 10% de la quantité de médicament présente dans le sang et qu'il reçoit une dose supplémentaire de 0,25 mg de la substance médicamenteuse.

On étudie l'évolution de la quantité de médicament dans le sang avec le modèle suivant : pour tout entier naturel n , on note u_n la quantité, en mg, de médicament dans le sang du patient au bout de n périodes de trente minutes. On a donc $u_0 = 1$.

1. Calculer la quantité de médicament dans le sang au bout d'une demi-heure.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,25$.
3. (a) Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1} < 5$.
(b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. On estime que le médicament est réellement efficace lorsque sa quantité dans le sang du patient est supérieure ou égale à 1,8 mg.
(a) Recopier et compléter le script écrit en langage Python suivant de manière à déterminer au bout de combien de périodes de trente minutes le médicament commence à être réellement efficace.

```
def efficace():  
    u=1  
    n=0  
    while ..... :  
        u = .....  
        n = n+1  
    return n
```

- (b) Quelle est la valeur renvoyée par ce script ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
5. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = 2,5 - u_n$.
 - (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme (v_0) .
 - (b) Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_n = 2,5 - 1,5 \times 0,9^n$.
 - (c) Le médicament devient toxique lorsque sa quantité présente dans le sang du patient dépasse 3 mg. D'après le modèle choisi, le traitement présente-t-il un risque pour le patient ? Justifier.

Partie B : modèle continu de la quantité médicamenteuse

Après une injection initiale de 1 mg de médicament, le patient est placé sous perfusion.

Le débit de la substance médicamenteuse administrée au patient est de 0,5 mg par heure.

La quantité de médicament dans le sang du patient, en fonction du temps, est modélisée

par la fonction f , définie sur $[0; +\infty[$, par $f(t) = 2,5 - 1,5 e^{-0,2t}$,

où t désigne la durée de la perfusion exprimée en heure.

On rappelle que ce médicament est réellement efficace lorsque sa quantité dans le sang du patient est supérieure ou égale à 1,8 mg.

1. Le médicament est-il réellement efficace au bout de 3 h 45 min ?
2. Selon ce modèle, déterminer au bout de combien de temps le médicament devient réellement efficace.
3. Comparer le résultat obtenu avec celui obtenu à la question 4.(b) du modèle discret de la Partie A.