

EXERCICE 2 (7 points)

Principaux domaines abordés :

Suites ;
Fonctions, Fonction exponentielle.

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^3 e^x$.

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. On définit la suite (u_n) par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = f(u_n) .$$

a. Calculer u_1 puis u_2 .

On donnera les valeurs exactes puis les valeurs approchées à 10^{-3} .

b. On considère la fonction `fonc`, écrite en langage Python ci-dessous.

On rappelle qu'en langage
Python, « `i in range(n)` »
signifie que i varie de 0 à $n-1$.

```
def fonc(n):  
    u=-1  
    for i in range(n):  
        u=u**3*exp(u)  
    return u
```

Déterminer, sans justifier, la valeur renvoyée par `fonc(2)` arrondie à 10^{-3} .

2. a. Démontrer que, pour tout x réel, on a $f'(x) = x^2 e^x (x + 3)$.

b. Justifier que le tableau de variations de f sur $\mathbf{R}$ est celui représenté ci-dessous :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
f	0	$-27e^{-3}$	$+\infty$

c. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a :

$$-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0 .$$

d. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

e. On note ℓ la limite de la suite (u_n) .

On rappelle que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Déterminer ℓ . (Pour cela, on admettra que l'équation $x^2 e^x - 1 = 0$ possède une seule solution dans $\mathbf{R}$ et que celle-ci est strictement supérieure à $\frac{1}{2}$.)