

## Exercice 2 (5 points)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = e^{3x} - (2x + 1)e^x$$

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Partie A – Étude d'une fonction auxiliaire

On définit la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = 3e^{2x} - 2x - 3$$

1.
  - a. Déterminer la limite de la fonction  $g$  en  $-\infty$ .
  - b. Déterminer la limite de la fonction  $g$  en  $+\infty$ .
2.
  - a. On admet que la fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et on note  $g'$  sa fonction dérivée.  
Démontrer que pour tout nombre réel  $x$ , on a  $g'(x) = 6e^{2x} - 2$ .
  - b. Étudier le signe de la fonction dérivée  $g'$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - c. En déduire le tableau de variations de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$ . Vérifier que la fonction  $g$  admet un minimum égal à  $\ln(3) - 2$ .
3.
  - a. Montrer que  $x = 0$  est solution de l'équation  $g(x) = 0$ .
  - b. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une deuxième solution, non nulle, notée  $\alpha$ , dont on donnera un encadrement d'amplitude  $10^{-1}$ .
4. Déduire des questions précédentes le signe de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Partie B – Étude de la fonction $f$

1. La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et on note  $f'$  sa fonction dérivée.  
Démontrer que pour tout nombre réel  $x$ , on a  $f'(x) = e^x g(x)$ , où  $g$  est la fonction définie dans la **partie A**.
2. En déduire alors le signe de la fonction dérivée  $f'$  puis les variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. Pourquoi la fonction  $f$  n'est-elle pas convexe sur  $\mathbb{R}$  ? Expliquer.