

EXERCICE 2 (5 points)

On considère le cube ABCDEFGH qui est représenté en ANNEXE.

Dans le repère orthonormé $(A; \vec{AB}; \vec{AD}; \vec{AE})$, on considère les points M, N et P de coordonnées :

$$M\left(1; 1; \frac{3}{4}\right), N\left(0; \frac{1}{2}; 1\right), P\left(1; 0; -\frac{5}{4}\right)$$

Dans cet exercice, on se propose de calculer le volume du tétraèdre FMNP.

1. Donner les coordonnées des vecteurs $\vec{MN}$ et $\vec{MP}$.
2. Placer les points M, N et P sur la figure donnée en ANNEXE qui sera à rendre avec la copie.
3. Justifier que les points M, N et P ne sont pas alignés.
Dès lors les trois points définissent le plan (MNP).
4. (a) Calculer le produit scalaire $\vec{MN} \cdot \vec{MP}$, puis en déduire la nature du triangle MNP.
(b) Calculer l'aire du triangle MNP.
5. (a) Montrer que le vecteur $\vec{n}(5; -8; 4)$ est un vecteur normal au plan (MNP).
(b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (MNP) est $5x - 8y + 4z = 0$.
6. On rappelle que le point F a pour coordonnées $F(1; 0; 1)$. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d orthogonale au plan (MNP) et passant par le point F.
7. On note L le projeté orthogonal du point F sur le plan (MNP).

Montrer que les coordonnées du point L sont : $L\left(\frac{4}{7}; \frac{24}{35}; \frac{23}{35}\right)$.

8. Montrer que $FL = \frac{3\sqrt{105}}{35}$ puis calculer le volume du tétraèdre FMNP.

On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire d'une base} \times \text{hauteur associée à cette base.}$$

ANNEXE à rendre avec la copie

