

## EXERCICE 2 (5 points)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = 3x + 1 - 2x \ln(x).$$

On admet que la fonction  $f$  est deux fois dérivable sur  $]0 ; +\infty[$ .

On note  $f'$  sa dérivée et  $f''$  sa dérivée seconde.

On note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .

2. a. Démontrer que pour tout réel  $x$  strictement positif :

$$f'(x) = 1 - 2\ln(x).$$

b. Étudier le signe de  $f'$  et dresser le tableau de variation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ . On fera figurer dans ce tableau les limites ainsi que la valeur exacte de l'extremum.

3. a. Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution sur  $]0 ; +\infty[$ .  
On notera  $\alpha$  cette solution.

b. En déduire le signe de la fonction  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$ .

4. On considère une primitive quelconque de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ . On la note  $F$ .

Peut-on affirmer que la fonction  $F$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $\left[e^{\frac{1}{2}} ; +\infty\right[$  ? Justifier.

5. a. Étudier la convexité de la fonction  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$ .

Quelle est la position de la courbe  $\mathcal{C}_f$  par rapport à ses tangentes ?

b. Déterminer une équation de la tangente  $T$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 1.

c. Dédurre des questions 5.a et 5.b que pour tout réel  $x$  strictement positif :

$$\ln(x) \geq 1 - \frac{1}{x}.$$