

Exercice 2. (5 points)**Thème : géométrie dans l'espace**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère :

- d_1 la droite passant par le point $H(2; 3; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$;
- d_2 la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2k - 3 \\ y = k \\ z = 5 \end{cases} \quad \text{où } k \text{ décrit } \mathbf{R}.$$

Le but de cet exercice est de déterminer une représentation paramétrique d'une droite Δ qui soit perpendiculaire aux droites d_1 et d_2 .

- a. Déterminer un vecteur directeur $\vec{v}$ de la droite d_2 .
 - b. Démontrer que les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.
 - c. Démontrer que les droites d_1 et d_2 ne sont pas sécantes.
 - d. Quelle est la position relative des droites d_1 et d_2 ?
- a. Vérifier que le vecteur $\vec{w} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
 - b. On considère le plan P passant par le point H et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$.
On admet qu'une équation cartésienne de ce plan est :
$$5x + 4y - z - 22 = 0.$$
Démontrer que l'intersection du plan P et de la droite d_2 est le point $M(3; 3; 5)$.

3. Soit Δ la droite de vecteur directeur $\vec{w}$ passant par le point M . Une représentation paramétrique de Δ est donc donnée par :

$$\begin{cases} x = -r + 3 \\ y = 2r + 3 \\ z = 3r + 5 \end{cases} \quad \text{où } r \text{ décrit } \mathbf{R}.$$

- a. Justifier que les droites Δ et d_1 sont perpendiculaires en un point L dont on déterminera les coordonnées.
- b. Expliquer pourquoi la droite Δ est solution du problème posé.