

Exercice 2. (6 points)**Thème : fonctions**

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-x} + x.$$

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$.

a. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f''(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right) e^{-x}.$$

b. En déduire les variations et le minimum de la fonction f' sur $\mathbf{R}$.

c. Justifier que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) > 0$.

d. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbf{R}$.

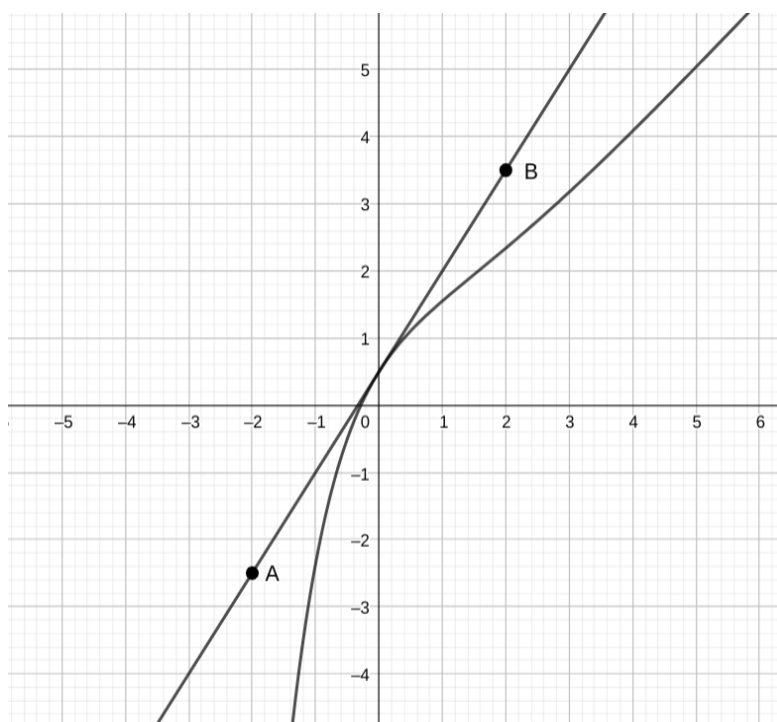
e. Donner une valeur arrondie à 10^{-3} de cette solution.

Partie B

On considère une fonction h , définie et dérivable sur $\mathbf{R}$, ayant une expression de la forme $h(x) = (ax + b)e^{-x} + x$, où a et b sont deux réels.

Dans un repère orthonormé ci-après figurent :

- la courbe représentative de la fonction h ;
- les points A et B de coordonnées respectives $(-2 ; -2,5)$ et $(2 ; 3,5)$.



1. Conjecturer, avec la précision permise par le graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction h .
2. Sachant que la fonction h admet sur $\mathbf{R}$ une dérivée seconde d'expression

$$h''(x) = -\frac{3}{2}e^{-x} + xe^{-x},$$

valider ou non la conjecture précédente.

3. Déterminer une équation de la droite (AB).
4. Sachant que la droite (AB) est tangente à la courbe représentative de la fonction h au point d'abscisse 0, en déduire les valeurs de a et b .