

Exercice 2 (5 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $f(x) = 2xe^{-x}$.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; 1]$.

1. **a.** Résoudre sur l'intervalle $[0; 1]$ l'équation $f(x) = x$.
- b.** Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; 1]$, $f'(x) = 2(1 - x)e^{-x}$.
- c.** Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel, $0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1$.
 - b.** En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. Démontrer que la limite de la suite (u_n) est $\ln(2)$.
4. **a.** Justifier que pour tout entier naturel n , $\ln(2) - u_n$ est positif.
- b.** On souhaite écrire un script Python qui renvoie une valeur approchée de $\ln(2)$ par défaut à 10^{-4} près, ainsi que le nombre d'étapes pour y parvenir.
Recopier et compléter le script ci-dessous afin qu'il réponde au problème posé.

```
def seuil():
    n=0
    u=0.1
    while ln(2) - u ... 0.0001:
        n=n+1
        u=...
    return (u, n)
```

- c.** Donner la valeur de la variable n renvoyée par la fonction `seuil()`.