

5. On désigne par a un réel appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et on note K_a le point de coordonnées $(0 ; 0 ; a)$.

a. Exprimer le volume V_a de la pyramide $ABCDK_a$ en fonction de a .

b. On note Δ_a la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t' \\ y = t' \\ z = -t' + a \end{cases}$ où $t' \in \mathbb{R}$.

On appelle L_a le point d'intersection de la droite Δ_a avec le plan (BDG) . Montrer que les coordonnées du point L_a sont $\left(\frac{a+1}{3}; \frac{a+1}{3}; \frac{2a-1}{3}\right)$.

c. Déterminer, s'il existe, un réel strictement positif a tel que le tétraèdre $GBDK_a$ et la pyramide $ABCDK_a$ soient de même volume.

Exercice 2 (5 points)

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Un artisan crée des bonbons au chocolat dont la forme rappelle le profil de la montagne locale comme représenté en Figure 1. La base d'un tel bonbon est modélisée par la surface grisée, définie ci-dessous dans un repère orthonormé d'unité 1 cm (Figure 2).

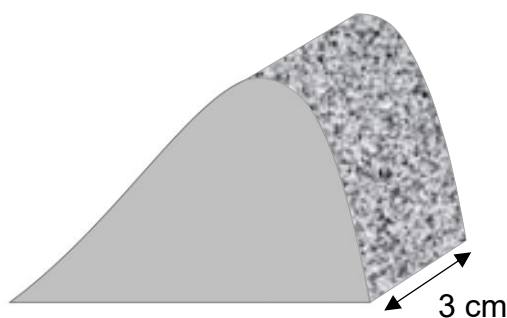


Figure 1

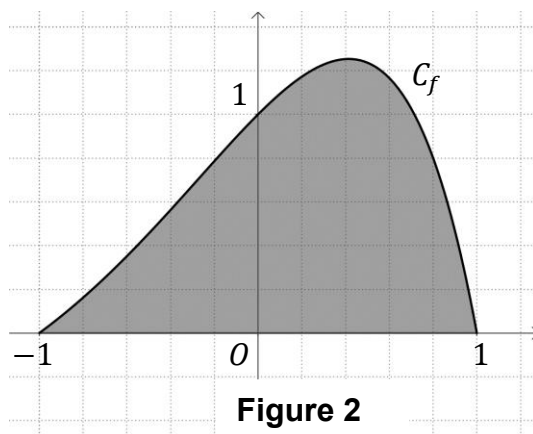


Figure 2

Cette surface est délimitée par l'axe des abscisses et la représentation graphique notée C_f de la fonction f définie sur $[-1 ; 1]$ par :

$$f(x) = (1 - x^2)e^x.$$

L'objectif de cette partie est de calculer le volume de chocolat nécessaire à la fabrication d'un bonbon au chocolat.

1.

a. Justifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1 ; 1]$ on a $f(x) \geq 0$.

b. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_{-1}^1 x e^x dx.$$

2. Le volume V de chocolat, en cm^3 , nécessaire à la fabrication d'un bonbon est donné par :

$$V = 3 \times S.$$

où S est l'aire, en cm^2 , de la surface colorée (Figure 2).

En déduire que ce volume V , arrondi à $0,1 \text{ cm}^3$ près, est égal à $4,4 \text{ cm}^3$.

Partie B

On s'intéresse maintenant au bénéfice réalisé par l'artisan sur la vente de ces bonbons au chocolat en fonction du volume hebdomadaire des ventes.

Ce bénéfice peut être modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0,01 ; +\infty[$ par :

$$B(q) = 8q^2(2 - 3 \ln q) - 3.$$

Le bénéfice est exprimé en dizaines d'euros et la quantité q en centaines de bonbons.

On admet que la fonction B est dérivable sur $[0,01 ; +\infty[$. On note B' sa fonction dérivée.

1.

- a. Déterminer $\lim_{q \rightarrow +\infty} B(q)$.
- b. Montrer que, pour tout $q \geq 0,01$, $B'(q) = 8q(1 - 6 \ln q)$.
- c. Étudier le signe de $B'(q)$, et en déduire le sens de variation de B sur $[0,01 ; +\infty[$. Dresser le tableau de variation complet de la fonction B .
- d. Quel est le bénéfice maximal, à l'euro près, que peut espérer l'artisan ?

2.

- a. Montrer que l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution β sur l'intervalle $[1,2 ; +\infty[$.
Donner une valeur approchée de β à 10^{-3} près.
- b. On admet que l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution α sur $[0,01 ; 1,2]$.
On donne $\alpha \approx 0,757$.
En déduire le nombre minimal et le nombre maximal de bonbons au chocolat à vendre pour réaliser un bénéfice supérieur à 100 euros.