

EXERCICE 2 (5 points)

Une entreprise qui fabrique des jouets doit effectuer des contrôles de conformité avant leur commercialisation. Dans cet exercice, on s'intéresse à deux tests effectués par l'entreprise : un test dit *de fabrication* et un test dit *de sécurité*.

À la suite d'un grand nombre de vérifications, l'entreprise affirme que :

- 95% des jouets réussissent le test de fabrication ;
- parmi les jouets qui réussissent le test de fabrication, 98% réussissent le test de sécurité ;
- 1% des jouets ne réussissent aucun des deux tests.

On choisit au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :

- F l'événement : « le jouet réussit le test de fabrication » ;
- S l'événement : « le jouet réussit le test de sécurité ».

Partie A

1. À partir des données de l'énoncé, donner les probabilités $P(F)$ et $P_F(S)$.
2. (a) Construire un arbre pondéré qui illustre la situation avec les données disponibles dans l'énoncé.
(b) Montrer que $P_{\overline{F}}(\overline{S}) = 0,2$.
3. Calculer la probabilité que le jouet choisi réussisse les deux tests.
4. Montrer que la probabilité que le jouet réussisse le test de sécurité vaut 0,97 arrondi au centième.
5. Lorsque le jouet a réussi le test de sécurité, quelle est la probabilité qu'il réussisse le test de fabrication ? Donner une valeur approchée du résultat au centième.

Partie B

On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de n jouets, où n est un entier strictement positif. On suppose que ce prélèvement se fait sur une quantité suffisamment grande de jouets pour être assimilé à une succession de n tirages indépendants avec remise.

On rappelle que la probabilité qu'un jouet réussisse le test de fabrication est égale à 0,95.

Soit S_n la variable aléatoire qui compte le nombre de jouets ayant réussi le test de fabrication. On admet que S_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,95$.

1. Exprimer l'espérance et la variance de la variable aléatoire S_n en fonction de n .
2. Dans cette question, on pose $n = 150$.
 - (a) Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de $P(S_{150} = 145)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
 - (b) Déterminer la probabilité qu'au moins 94% des jouets de ce lot réussissent le test de fabrication. Donner une valeur approchée du résultat à 10^{-3} près.

3. Dans cette question, l'entier naturel non nul n n'est plus fixé.

Soit F_n la variable aléatoire définie par : $F_n = \frac{S_n}{n}$. La variable aléatoire F_n représente la proportion des jouets qui réussissent le test de fabrication dans un lot de n jouets prélevés. On note $E(F_n)$ l'espérance et $V(F_n)$ la variance de la variable aléatoire F_n .

- (a) Montrer que $E(F_n) = 0,95$ et que $V(F_n) = \frac{0,0475}{n}$.
- (b) On s'intéresse à l'événement I suivant : « la proportion de jouets qui réussissent le test de fabrication dans un lot de n jouets est strictement comprise entre 93% et 97% ». En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer une valeur n de la taille du lot de jouets à prélever, à partir de laquelle la probabilité de l'événement I est supérieure ou égale à 0,96.