

Exercice 2. (5 points)

On étudie l'évolution de la population d'une espèce animale au sein d'une réserve naturelle.

Les effectifs de cette population ont été recensés à différentes années. Les données collectées sont présentées dans le tableau suivant :

Année	2000	2005	2010	2015
Nombre d'individus	50	64	80	100

Pour anticiper l'évolution de cette population, la direction de la réserve a choisi de modéliser le nombre d'individus en fonction du temps.

Pour cela, elle utilise une fonction, définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, dont la variable x représente le temps écoulé, en année, à partir de l'année 2000.

Dans son modèle, l'image de 0 par cette fonction vaut 50, ce qui correspond au nombre d'individus en l'an 2000.

Partie A. Modèle 1

Dans cette partie, la direction de la réserve fait l'hypothèse que la fonction cherchée satisfait l'équation différentielle suivante :

$$y' = 0,05y - 0,5 \quad (E_1)$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E_1) avec la condition initiale $y(0) = 50$.
2. Comparer les résultats du tableau avec ceux que l'on obtiendrait avec ce modèle.

Partie B. Modèle 2

Dans cette partie, la direction de la réserve fait l'hypothèse que la fonction cherchée satisfait l'équation différentielle suivante :

$$y' = 0,05y(1 - 0,00125y) \quad (E_2)$$

On note f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{800}{1 + 15e^{-0,05x}}$$

et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu les résultats suivants.

Pour toute la suite de l'exercice, on pourra utiliser ces résultats sans les démontrer, sauf pour la question 5.

	Instruction	Résultat
1	$f(x) := \frac{800}{1 + 15e^{-0,05x}}$	$f(x) = \frac{800}{1 + 15e^{-0,05x}}$
2	$f'(x) := \text{Dérivée}(f(x))$	$f'(x) = \frac{600e^{-0,05x}}{(1 + 15e^{-0,05x})^2}$
3	$f''(x) := \text{Dérivée}(f'(x))$	$f''(x) = \frac{30e^{-0,05x}}{(1 + 15e^{-0,05x})^3} (15e^{-0,05x} - 1)$
4	Résoudre $(15e^{-0,05x} - 1 \geq 0)$	$x \leq 20 \ln(15)$

1. Démontrer que la fonction f vérifie $f(0) = 50$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 0,05f(x)(1 - 0,00125f(x))$$

On admet que cette fonction f est l'unique solution de (E_2) prenant la valeur initiale de 50 en 0.

2. Avec ce nouveau modèle f , estimer l'effectif de cette population en 2050.
Arrondir le résultat à l'unité.
3. Calculer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire quant à la courbe C ?
Interpréter cette limite dans le cadre de ce problème concret.
4. Justifier que la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$.
5. Démontrer le résultat obtenu en ligne 4 du logiciel.
6. On admet que la vitesse de croissance de la population de cette espèce, exprimée en nombre d'individus par an, est modélisée par la fonction f' .
- a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe C .
- b. La direction de la réserve affirme :
« Au vu de ce modèle, la vitesse de croissance de la population de cette espèce va augmenter pendant un peu plus de cinquante ans, puis va diminuer ».
La direction a-t-elle raison ? Justifier.