

EXERCICE 2 commun à tous les candidats (5 points)

Au 1^{er} janvier 2020, la centrale solaire de Big Sun possédait 10 560 panneaux solaires. On observe, chaque année, que 2 % des panneaux se sont détériorés et nécessitent d'être retirés tandis que 250 nouveaux panneaux solaires sont installés.

Partie A - Modélisation à l'aide d'une suite

On modélise l'évolution du nombre de panneaux solaires par la suite (u_n) définie par $u_0 = 10\,560$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,98u_n + 250$, où u_n est le nombre de panneaux solaires au 1^{er} janvier de l'année $2020 + n$.

1.
 - a) Expliquer en quoi cette modélisation correspond à la situation étudiée.
 - b) On souhaite savoir au bout de combien d'années le nombre de panneaux solaires sera strictement supérieur à 12 000. À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.
 - c) Recopier et compléter le programme en Python ci-dessous de sorte que la valeur cherchée à la question précédente soit stockée dans la variable n à l'issue de l'exécution de ce dernier.

```
u = 10560
n = 0
while ..... :
    u = .....
    n = .....
```

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $u_n \leq 12\,500$.
3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
4. En déduire que la suite (u_n) converge. Il n'est pas demandé, ici, de calculer sa limite.
5. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 12\,500$, pour tout entier naturel n .
 - a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,98 dont on précisera le premier terme.
 - b) Exprimer, pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n .
 - c) En déduire, pour tout entier naturel n , u_n en fonction de n .
 - d) Déterminer la limite de la suite (u_n) . Interpréter ce résultat dans le contexte du modèle.

Partie B - Modélisation à l'aide d'une fonction

Une modélisation plus précise a permis d'estimer le nombre de panneaux solaires de la centrale à l'aide de la fonction f définie pour tout $x \in [0 ; +\infty[$ par $f(x) = 12500 - 500 e^{-0,02x+1,4}$, où x représente le nombre d'années écoulées depuis le 1^{er} janvier 2020.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f .
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. En utilisant ce modèle, déterminer au bout de combien d'années le nombre de panneaux solaires dépassera 12 000.