

PARTIE C

Les coûts de fabrication des composants de cette entreprise sont de 15 euros s'ils proviennent de la chaîne de montage n°1, 12 euros s'ils proviennent de la chaîne de montage n°2 et 9 euros s'ils proviennent de la chaîne de montage n°3.

Calculer le coût moyen de fabrication d'un composant pour cette entreprise.

EXERCICE 2 (7 points) [Fonctions, fonction logarithme]

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f , définie sur $]0; +\infty[$, par :

$$f(x) = 3x - x \ln(x) - 2 \ln(x).$$

PARTIE A : Étude d'une fonction auxiliaire g

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 2(x-1) - x \ln(x)$. On note g' la fonction dérivée de g . On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

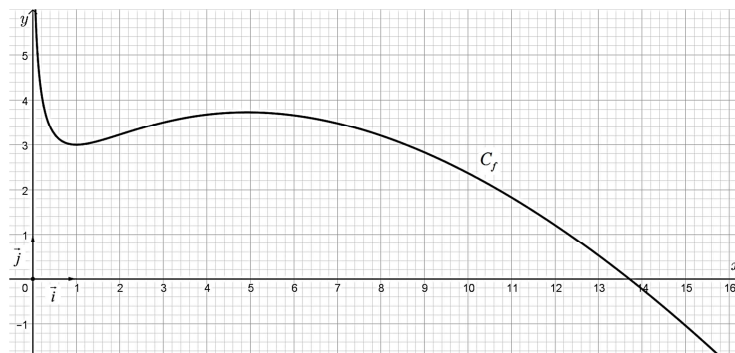
1. Calculer $g(1)$ et $g(e)$.
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ en justifiant votre démarche.
3. Montrer que, pour tout $x > 0$, $g'(x) = 1 - \ln(x)$. En déduire le tableau des variations de g sur $]0; +\infty[$.
4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions distinctes sur $]0; +\infty[$: 1 et α avec α appartenant à l'intervalle $[e; +\infty[$. On donnera un encadrement de α à 0,01 près.
5. En déduire le tableau de signes de g sur $]0; +\infty[$.

PARTIE B : Étude de la fonction f

On considère dans cette partie la fonction f , définie sur $]0; +\infty[$, par

$$f(x) = 3x - x \ln(x) - 2 \ln(x).$$

On note f' la fonction dérivée de f . La représentation graphique C_f de cette fonction f est donnée dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ci-dessous. On admet que : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.



1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ en justifiant votre démarche.
2. a. Justifier que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.
b. En déduire le tableau des variations de f sur $]0; +\infty[$.
3. On admet que, pour tout $x > 0$, la dérivée seconde de f , notée f'' , est définie par $f''(x) = \frac{2-x}{x^2}$. Étudier la convexité de f et préciser les coordonnées du point d'inflexion de C_f .

EXERCICE 3 (7 points) [Suites]

La population d'une espèce en voie de disparition est surveillée de près dans une réserve naturelle.

Les conditions climatiques ainsi que le braconnage font que cette population diminue de 10 % chaque année.

Afin de compenser ces pertes, on réintroduit dans la réserve 100 individus à la fin de chaque année.

On souhaite étudier l'évolution de l'effectif de cette population au cours du temps. Pour cela, on modélise l'effectif de la population de l'espèce par la suite (u_n) où u_n représente l'effectif de la population au début de l'année 2020+ n .

On admet que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$.

Au début de l'année 2020, la population étudiée compte 2 000 individus, ainsi $u_0 = 2000$.

1. Justifier que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 100.$$

2. Calculer u_1 , puis u_2 .
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $1000 < u_{n+1} \leq u_n$.
4. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.
5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 1000$.
 - a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,9.
 - b. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 1000(1 + 0,9^n)$.
 - c. Déterminer la limite de la suite (u_n) . En donner une interprétation dans le contexte de cet exercice.
6. On souhaite déterminer le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous d'un certain seuil S (avec $S > 1000$).
 - a. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \leq 1020$.
Justifier la réponse par un calcul.