

EXERCICE 2 (7 points)

Principaux domaines abordés :

Fonctions, Fonction logarithme.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \ln(x) - x - 2.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$.

On note f' sa dérivée, f'' sa dérivée seconde et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1.
 - a. Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$, on a $f'(x) = \ln(x)$.
 - b. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = e$.
 - c. Justifier que la fonction f est convexe sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - d. En déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la tangente T .
2.
 - a. Calculer la limite de la fonction f en 0.
 - b. Démontrer que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
4.
 - a. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0; +\infty[$. On note α cette solution.
 - b. Justifier que le réel α appartient à l'intervalle $]4,3 ; 4,4[$.
 - c. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
5. On considère la fonction `seuil` suivante écrite dans le langage Python :

On rappelle que la fonction `log` du module `math` (que l'on suppose importé) désigne la fonction logarithme népérien $\ln$.

```
def seuil(pas):  
    x=4.3  
    while x*log(x)-x-2<0:  
        x=x+pas  
    return x
```

Quelle est la valeur renvoyée à l'appel de la fonction `seuil(0.01)` ?
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.