

Exercice 2 (5 points)

On étudie un groupe de 3 000 sportifs qui pratiquent soit l'athlétisme dans le club A, soit le basketball dans le club B.

En 2023, le club A compte 1 700 membres et le club B en compte 1 300.

On décide de modéliser le nombre de membres du club A et du club B respectivement par deux suites (a_n) et (b_n) , où n désigne le rang de l'année à partir de 2023.

L'année 2023 correspond au rang 0. On a alors $a_0 = 1\,700$ et $b_0 = 1\,300$.

Pour notre étude, on fait les hypothèses suivantes :

- durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe ;
- chaque année, 15 % des sportifs du club A quittent ce club et adhèrent au club B ;
- chaque année, 10 % des sportifs du club B quittent ce club et adhèrent au club A.

- 1) Calculer les nombres de membres de chaque club en 2024.
- 2) Pour tout entier naturel n , déterminer une relation liant a_n et b_n .
- 3) Montrer que la suite (a_n) vérifie la relation suivante pour tout entier naturel n , on a :
$$a_{n+1} = 0,75 a_n + 300$$
.
- 4) a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a :
$$1\,200 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1\,700$$
.
b) En déduire que la suite (a_n) converge.
- 5) Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = a_n - 1\,200$.
a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
b) Exprimer v_n en fonction de n .
c) En déduire que pour tout entier naturel n , $a_n = 500 \times 0,75^n + 1\,200$.
- 6) a) Déterminer la limite de la suite (a_n) .
b) Interpréter le résultat de la question précédente dans le contexte de l'exercice.
- 7) a) Recopier et compléter le programme Python ci-dessous afin qu'il renvoie la plus petite valeur de n à partir de laquelle le nombre de membres du club A est strictement inférieur à 1 280.

```
def seuil() :  
    n = 0  
    A = 1700  
    while ... :  
        n = n+1  
        A = ...  
    return ...
```

- b) Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on appelle la fonction `seuil`.