

## EXERCICE 2 (5 points)

On considère la fonction  $f$ , définie sur  $[0 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = xe^{-x}.$$

On note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

On admet que  $f$  est deux fois dérivable sur  $[0 ; +\infty[$ .

On note  $f'$  sa dérivée et  $f''$  sa dérivée seconde.

1. En remarquant que pour tout  $x$  dans  $[0 ; +\infty[$ , on a  $f(x) = \frac{x}{e^x}$ ,  
démontrer que la courbe  $\mathcal{C}_f$  possède une asymptote en  $+\infty$  dont on donnera  
une équation.

2. Démontrer que pour tout réel  $x$  appartenant à  $[0 ; +\infty[$  :

$$f'(x) = (1 - x)e^{-x}.$$

3. Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $[0 ; +\infty[$ , sur lequel on fera figurer  
les valeurs aux bornes ainsi que la valeur exacte de l'extremum.

4. Déterminer, sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ , le nombre de solutions de l'équation

$$f(x) = \frac{367}{1000}.$$

5. On admet que pour tout  $x$  appartenant à  $[0 ; +\infty[$  :

$$f''(x) = e^{-x}(x - 2).$$

Étudier la convexité de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .

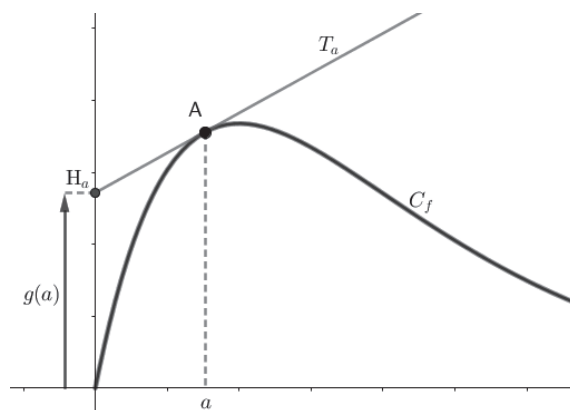
6. Soit  $a$  un réel appartenant à  $[0 ; +\infty[$  et  $A$  le  
point de la courbe  $\mathcal{C}_f$  d'abscisse  $a$ .

On note  $T_a$  la tangente à  $\mathcal{C}_f$  en  $A$ .

On note  $H_a$  le point d'intersection de la droite  
 $T_a$  et de l'axe des ordonnées.

On note  $g(a)$  l'ordonnée de  $H_a$ .

La situation est représentée sur la figure ci-  
contre.



- a. Démontrer qu'une équation réduite de la tangente  $T_a$  est :

$$y = ((1 - a)e^{-a}) \cdot x + a^2e^{-a}.$$

- b. En déduire l'expression de  $g(a)$ .

- c. Démontrer que  $g(a)$  est maximum lorsque  $A$  est un point d'inflexion de  
la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

*Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront  
valorisées.*