

Exercice 2 (6 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty; 1[$ par $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty; 1[$.

On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1.
 - a. Déterminer la limite de la fonction f en 1.
 - b. En déduire une interprétation graphique.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
3.
 - a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty; 1[$, on a $f'(x) = \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$.
 - b. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty; 1[$.
4. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty; 1[$, on a $f''(x) = \frac{(x^2-4x+5)e^x}{(x-1)^3}$.
 - a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty; 1[$.
 - b. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
 - c. En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty; 1[$, on a :
$$e^x \geq (-2x - 1)(x - 1).$$
5.
 - a. Justifier que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-\infty; 1[$.
 - b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .