

Partie B

On choisit au hasard une personne venue un week-end au centre multisports. On note T_1 la variable aléatoire donnant son temps d'attente total en minute avant les accès aux activités sportives pendant la journée du samedi, et T_2 la variable aléatoire donnant son temps d'attente total en minute avant les accès aux activités sportives pendant la journée du dimanche.

On admet que :

- T_1 suit une loi de probabilité d'espérance $E(T_1) = 40$ et d'écart-type $\sigma(T_1) = 10$;
- T_2 suit une loi de probabilité d'espérance $E(T_2) = 60$ et d'écart-type $\sigma(T_2) = 16$;
- les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes.

On note T la variable aléatoire donnant le temps total d'attente avant les accès aux activités sportives lors des deux jours, exprimé en minute. Ainsi on a $T = T_1 + T_2$.

1. Déterminer l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T . Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
2. Montrer que la variance $V(T)$ de la variable aléatoire T est égale à 356.
3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que, pour une personne choisie au hasard parmi celles venues un week-end au centre multisports, la probabilité que son temps total d'attente T soit strictement compris entre 60 et 140 minutes est supérieure à 0,77.

Exercice 2 (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère :

- les points $A(-1 ; 2 ; 1)$, $B(1 ; -1 ; 2)$ et $C(1 ; 1 ; 1)$;
- la droite d dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d : \begin{cases} x = \frac{3}{2} + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} ;$$

- la droite d' dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d' : \begin{cases} x = s \\ y = \frac{3}{2} + s \\ z = 3 - 2s \end{cases} \text{ avec } s \in \mathbb{R}.$$

Partie A

1. Montrer que les droites d et d' sont sécantes au point $S\left(-\frac{1}{2} ; 1 ; 4\right)$.

2.

- a. Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC) .
- b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :
$$x + 2y + 4z - 7 = 0$$
- c. Démontrer que les points A , B , C et S ne sont pas coplanaires.

3.

- a. Démontrer que le point $H(-1 ; 0 ; 2)$ est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC) .
- b. En déduire qu'il n'existe aucun point M du plan (ABC) tel que $SM < \frac{\sqrt{21}}{2}$.

Partie B

On considère un point M appartenant au segment $[CS]$. On a donc $\overrightarrow{CM} = k \overrightarrow{CS}$ avec k réel de l'intervalle $[0 ; 1]$.

1. Déterminer les coordonnées du point M en fonction de k .
2. Existe-t-il un point M sur le segment $[CS]$ tel que le triangle MAB soit rectangle en M ?

Exercice 3 (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{1 + 5^n}{2 + 3^n}.$$

Affirmation 1 : La suite (u_n) converge vers $\frac{5}{3}$.

2. On considère la suite (w_n) définie par :

$$w_0 = 0 \text{ et, pour tout entier naturel } n, w_{n+1} = 3w_n - 2n + 3.$$

Affirmation 2 : Pour tout entier naturel n , $w_n \geq n$.

3. On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ dont la courbe représentative C_f est donnée dans un repère orthonormé sur la figure (Fig. 1) en page 5. On précise que :
 - T est la tangente à C_f au point A d'abscisse 8 ;
 - L'axe des abscisses est la tangente horizontale à C_f au point d'abscisse 1.