

Exercice 2 (6 points)

Partie A : étude du sens de variation d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
2. a. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Vérifier que, pour tout réel x , on a $f'(x) = \frac{2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$.
b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie B : étude de la convergence d'une suite récurrente

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $1 \leq u_n \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$.
2. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
3. Le but de cette question est de retrouver par une autre méthode les résultats de la question 2. de la **partie B**.

Pour tout entier naturel n , on pose :

$$v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}.$$

On admet que la suite (v_n) est bien définie.

- a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 4 dont on précisera le premier terme.
- b. En déduire une expression de v_n en fonction de n puis que $u_n = \sqrt{\frac{1,5 \times 4^n}{1 + 0,5 \times 4^n}}$ pour tout entier naturel n .
- c. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Partie C : étude de la convergence de la somme de termes

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_{n-1}^2$.

1. Recopier et compléter le script Python ci-dessous afin que celui-ci permette de lister les p premiers termes de la suite (S_n) .

```
from math import *  
  
def termes(p) :  
    u=...  
    S=0  
    L=[]  
    for i in range(p) :  
        S=...  
        u=...  
        L.append(S)  
    return L
```

Remarque : on rappelle qu'en langage Python,

- la commande `L=[]` crée une liste vide ;
- la commande `L.append(S)` ajoute, à la fin de la liste `L`, l'élément supplémentaire `S`.

2. On rappelle que, pour tout entier naturel k , on a $1 \leq u_k \leq \sqrt{3}$.
Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $n \leq S_n \leq 3n$.
3. En déduire les limites respectives de S_n et de $\frac{S_n}{n^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.