

Exercice 3 (5 points)

Soit a un nombre réel strictement supérieur à 1.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2.$$

On admet que pour tout entier naturel n , $u_n > 1$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) pour différentes valeurs du nombre réel a .

Partie A : étude de la suite (u_n) dans le cas $1 < a < 2$.

1.
 - a. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - 2 = u_n(u_n - 2)$.
 - b. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$.
2. Dans cette question, on pourra utiliser les égalités établies dans la question précédente.
 - a. En utilisant un raisonnement par récurrence démontrer que, pour tout entier naturel n :
$$u_n < 2.$$
 - b. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Partie B : étude dans le cas particulier $a = 2$.

1. On donne ci-contre la fonction u écrite en langage Python.

Déterminer les valeurs renvoyées par le programme lorsque l'on saisit $u(2, 1)$ et $u(2, 2)$ dans la console Python.

```
def u(a,n) :  
    u=a  
    for k in range(n):  
        u=u**2-2*u+2  
    return u
```

2. Quelle conjecture peut-on formuler concernant la suite (u_n) dans le cas où $a = 2$? On admettra ce résultat sans démonstration.

Partie C : étude dans le cas général.

1. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = \ln(u_n - 1)$.
 - a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 dont on précisera le premier terme en fonction de a .
 - b. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 1 + e^{2^n \times \ln(a-1)}$.
2. Déterminer, suivant les valeurs du réel a strictement supérieur à 1, la limite de la suite (u_n) .