

EXERCICE 3 (7 points)

Principaux domaines abordés :

Suites ;
Fonctions, Fonction exponentielle.

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 1 + x - e^{0,5x-2}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$. On note f' sa dérivée.

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
b. Démontrer que, pour tout réel x non nul, $f(x) = 1 + 0,5x \left(2 - \frac{e^{0,5x}}{0,5x} \times e^{-2} \right)$.
En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. a. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x .
b. Démontrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x) < 0$ est l'intervalle $]4 + 2\ln(2) ; +\infty[$.
3. Déduire des questions précédentes le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbf{R}$.
On fera figurer la valeur exacte de l'image de $4 + 2\ln(2)$ par f .
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-1; 0]$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ où } f \text{ est la fonction définie à la partie A.}$$

1. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n \leq u_{n+1} \leq 4.$$

- b. En déduire que la suite (u_n) converge. On notera ℓ la limite.
2. a. On rappelle que ℓ vérifie la relation $\ell = f(\ell)$.
Démontrer que $\ell = 4$.
b. On considère la fonction `valeur` écrite ci-contre dans le langage Python :

```
def valeur(a):  
    u=0  
    n=0  
    while u<=a:  
        u=1+u-exp(0.5*u-2)  
        n=n+1  
    return n
```

L'instruction `valeur(3.99)` renvoie la valeur 12.

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.