

2. Le responsable de l'hôtel affirme que parmi les clients qui visitent la grotte, plus de la moitié visitent également le musée. Cette affirmation est-elle exacte ?

3. Les tarifs pour les visites sont les suivants :

- visite du musée : 12 euros ;
- visite de la grotte : 5 euros.

On considère la variable aléatoire T qui modélise la somme dépensée par un client de l'hôtel pour ces visites.

- a. Donner la loi de probabilité de T . On présentera les résultats sous la forme d'un tableau.
- b. Calculer l'espérance mathématique de T .
- c. Pour des questions de rentabilité, le responsable de l'hôtel estime que le montant moyen des recettes des visites doit être supérieur à 700 euros par jour. Déterminer le nombre moyen de clients par journée permettant d'atteindre cet objectif.

4. Pour augmenter les recettes, le responsable souhaite que l'espérance de la variable aléatoire modélisant la somme dépensée par un client de l'hôtel pour ces visites passe à 15 euros, sans modifier le prix de visite du musée qui demeure à 12 euros. Quel prix faut-il fixer pour la visite de la grotte afin d'atteindre cet objectif ? (On admettra que l'augmentation du prix d'entrée de la grotte ne modifie pas la fréquentation des deux sites).

5. On choisit au hasard 100 clients de l'hôtel, en assimilant ce choix à un tirage avec remise. Quelle est la probabilité qu'au moins les trois quarts de ces clients aient visité la grotte à l'occasion de leur séjour à l'hôtel ? On donnera une valeur du résultat à 10^{-3} près.

Exercice 3 (7 points)

Thèmes : fonctions logarithme et exponentielle, suites

Les parties A et B sont, dans une large mesure, indépendantes.

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

1. Donner la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

a. Montrer que, pour tout nombre réel $x \geq 1$, $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$.

b. Justifier le tableau de signes suivant, donnant le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .

x	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	$\emptyset$	-

c. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f .

3. Soit k un nombre réel positif ou nul.

a. Montrer que, si $0 \leq k \leq \frac{1}{e}$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1 ; e]$.

b. Si $k > \frac{1}{e}$, l'équation $f(x) = k$ admet-elle des solutions sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$? Justifier.

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{\frac{x}{4}}$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = e^{\frac{u_n}{4}} \text{ c'est-à-dire : } u_{n+1} = g(u_n)$$

1. Justifier que la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \leq u_{n+1} \leq e$.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

On note ℓ la limite de la suite (u_n) , et on admet que ℓ est solution de l'équation :

$$e^{\frac{x}{4}} = x.$$

4. En déduire que ℓ est solution de l'équation $f(x) = \frac{1}{4}$, où f est la fonction étudiée dans la **partie A**.
5. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la limite ℓ de la suite (u_n) .

Exercice 4 (7 points)

Thème : géométrie dans l'espace

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(-1; -1; 3)$, $B(1; 1; 2)$, $C(1; -1; 7)$.

On considère également la droite Δ passant par les points $D(-1; 6; 8)$ et $E(11; -9; 2)$.

1. a. Vérifier que la droite Δ admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 6 - 5t \\ z = 8 - 2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

- b. Préciser une représentation paramétrique de la droite Δ' parallèle à Δ et passant par l'origine O du repère.
- c. Le point $F(1,36; -1,7; -0,7)$ appartient-il à la droite Δ' ?

- 2.a. Montrer que les points A , B et C définissent un plan.

- b. Montrer que la droite Δ est perpendiculaire au plan (ABC) .
- c. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $4x - 5y - 2z + 5 = 0$.

- 3.a. Montrer que le point $G(7; -4; 4)$ appartient à la droite Δ .

- b. Déterminer les coordonnées du point H , projeté orthogonal du point G sur le plan (ABC) .
- c. En déduire que la distance du point G au plan (ABC) est égale à $3\sqrt{5}$.

- 4.a. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A .

- b. Calculer le volume V du tétraèdre $ABCG$.

On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur correspondant à cette base.