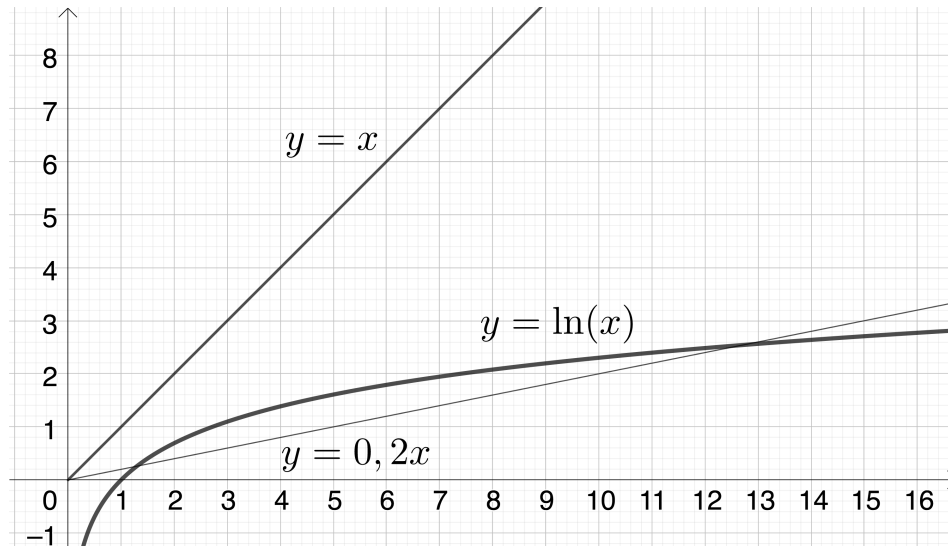


### EXERCICE 3 (5 points)

Soit  $k$  un réel strictement positif. Le but de cet exercice est de déterminer le nombre de solutions de l'équation  $\ln(x) = kx$  de paramètre  $k$ .

#### 1. Conjectures graphiques :

On a représenté, ci-dessous, dans un repère orthogonal, la courbe d'équation  $y = \ln(x)$ , la droite d'équation  $y = x$  ainsi que la droite d'équation  $y = 0,2x$  :



À partir du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation  $\ln(x) = kx$  pour  $k = 1$  puis pour  $k = 0,2$ .

#### 2. Étude du cas $k = 1$ :

On considère la fonction  $f$ , définie et dérivable sur  $]0; +\infty[$ , par :  $f(x) = \ln(x) - x$ .  
On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$ .

- Calculer  $f'(x)$ .
- Étudier le sens de variation de la fonction  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .  
Dresser le tableau des variations de la fonction  $f$  en y faisant figurer la valeur exacte des extrema s'il y en a. Les limites aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
- En déduire le nombre de solutions de l'équation  $\ln(x) = x$ .

### 3. Étude du cas général :

$k$  est un nombre réel strictement positif. On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = \ln(x) - kx$ .

On admet que le tableau des variations de la fonction  $g$  est le suivant :

| $x$    | 0         | $\frac{1}{k}$               | $+\infty$ |
|--------|-----------|-----------------------------|-----------|
| $g(x)$ |           | $g\left(\frac{1}{k}\right)$ |           |
|        | $-\infty$ |                             | $-\infty$ |

- Donner, en fonction du signe de  $g\left(\frac{1}{k}\right)$ , le nombre de solutions de l'équation  $g(x) = 0$ .
- Calculer  $g\left(\frac{1}{k}\right)$  en fonction du réel  $k$ .
- Montrer que  $g\left(\frac{1}{k}\right) > 0$  équivaut à  $\ln(k) < -1$ .
- Déterminer l'ensemble des valeurs de  $k$  pour lesquelles l'équation  $\ln(x) = kx$  possède exactement deux solutions.
- Donner, selon les valeurs de  $k$ , le nombre de solutions de l'équation  $\ln(x) = kx$ .