

1.
 - a. Montrer que les points A, B et C définissent un plan que l'on notera $\mathcal{P}$.
 - b. Montrer que la droite (CD) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$. Sur le plan $\mathcal{P}$, que représente le point C par rapport à D ?
 - c. Montrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est : $2x + y - z - 3 = 0$.
2.
 - a. Calculer la distance CD .
 - b. Existe-t-il un point M du plan $\mathcal{P}$ différent de C vérifiant $MD = \sqrt{6}$? Justifier la réponse.
3.
 - a. Montrer que la droite Δ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.
Soit H le projeté orthogonal du point D sur la droite Δ .
 - b. Montrer que H est le point de Δ associé à la valeur $t = -2$ dans la représentation paramétrique de Δ donnée ci-dessus.
 - c. En déduire la distance du point D à la droite Δ .

Exercice 3 (4 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Les probabilités demandées seront données à 10^{-3} près.

Pour aider à la détection de certaines allergies, on peut procéder à un test sanguin dont le résultat est soit positif, soit négatif.

Dans une population, ce test donne les résultats suivants :

- Si un individu est allergique, le test est positif dans 97 % des cas ;
- Si un individu n'est pas allergique, le test est négatif dans 95,7 % des cas.

Par ailleurs, 20 % des individus de la population concernée présentent un test positif.

On choisit au hasard un individu dans la population, et on note :

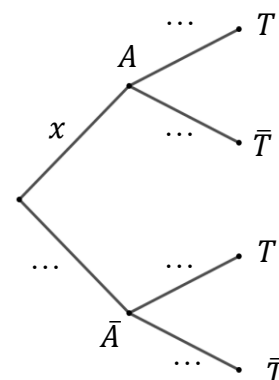
- A l'événement « l'individu est allergique » ;
- T l'événement « l'individu présente un test positif ».

On notera $\bar{A}$ et $\bar{T}$ les événements contraires de A et T .

On appelle par ailleurs x la probabilité de l'événement A : $x = p(A)$.

Partie A

1. Reproduire et compléter l'arbre ci-contre décrivant la situation, en indiquant sur chaque branche la probabilité correspondante.
2.
 - a. Démontrer l'égalité : $p(T) = 0,927x + 0,043$.
 - b. En déduire la probabilité que l'individu choisi soit allergique.
3. Justifier par un calcul l'affirmation suivante :
« Si le test d'un individu choisi au hasard est positif, il y a plus de 80% de chances que cet individu soit allergique ».



Partie B :

On réalise une enquête sur les allergies dans une ville en interrogeant 150 habitants choisis au hasard, et on admet que ce choix se ramène à des tirages successifs indépendants avec remise.

On sait que la probabilité qu'un habitant choisi au hasard dans cette ville soit allergique est égale à 0,08. On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 150 habitants choisis au hasard associe le nombre de personnes allergiques dans cet échantillon.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité que 20 personnes exactement parmi les 150 interrogées soient allergiques.
3. Déterminer la probabilité qu'au moins 10% des personnes parmi les 150 interrogées soient allergiques.

Exercice 4 (7 points)

PARTIE A

On définit sur l'intervalle $]0; +\infty[$ la fonction g par : $g(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln x$ où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Montrer que pour $x > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui du trinôme du second degré $(x^2 - 2x + 2)$.
2. En déduire que la fonction g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0,5 ; 1]$, que l'on notera α .
4. On donne le tableau de signes de g sur l'intervalle $]0; +\infty[$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$		-	+

Justifier ce tableau de signes à l'aide des résultats obtenus aux questions précédentes.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = e^x \ln x$.

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$, on note f' sa fonction dérivée, f'' sa fonction dérivée seconde et on admet que :

pour tout nombre réel $x > 0$, $f'(x) = e^x \left(\frac{1}{x} + \ln x \right)$.

Démontrer que, pour tout nombre réel $x > 0$, on a : $f''(x) = e^x \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln x \right)$.

2. On pourra remarquer que pour tout réel $x > 0$, $f''(x) = e^x \times g(x)$, où g désigne la fonction étudiée dans la **partie A**.

- a. Dresser le tableau de signes de la fonction f'' sur $]0; +\infty[$. Justifier.
- b. Justifier que la courbe C_f admet un unique point d'inflexion A.
- c. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Justifier.

3.
 - a. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
 - b. Montrer que $f'(\alpha) = \frac{e^\alpha}{\alpha^2} (1 - \alpha)$. On rappelle que α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$.
 - c. Démontrer que $f'(\alpha) > 0$ et en déduire le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à $]0; +\infty[$.
 - d. En déduire le tableau de variations complet de la fonction f sur $]0; +\infty[$.